

Kolokwia przykładowe

K1

1. Oblicz granice ciągów:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^{n+1}}{3^{n+5}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+4} \right)^{3n} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{n-2}}$$

2. (a) Zbadaj monotoniczność ciągu $a_n = \frac{3n+2}{n+5}$.

(b) Wykaż, że nie istnieje granica ciągu $b_n = \left(\frac{1}{n} - 2\right)^n$.

3. Oblicz granice funkcji (o ile istnieją):

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{|x|} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$$

4. Oblicz pochodną funkcji (a) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x + 4x^3} - \ln 2$ (b) $f(x) = x\sqrt{\operatorname{arctg} x}$ (c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(2x-1)}$

5. (a) Wyznacz asymptoty pionowe wykresu funkcji $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

(b) Wyznacz asymptoty ukośne/poziome wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Warunki zaliczenia Kolokwium 1: zad. 1,3, 4 - dwa podpunkty, zad. 2,5 - jeden punkt.

K2

1. (a) Wyznacz ekstrema globalne funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ na przedziale $[1, 3]$.

(b) Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

(c) Wyznacz przedziały wklęsłości, wypukłości i punkty przegięcia funkcji $f(x) = \ln(4 + x^2)$.

2. Naszkicuj wykres funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli $f''(x) > 0$ dla $x \in (0, 4)$, $f'(x) < 0$ dla $x < 2$, $x_1 = 2$ - min. lok., $x_2 = 0$ - pkt przegięcia, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

3. Oblicz całki nieoznaczone:

$$(a) \int \frac{3x-1}{x^2+x+1} dx \quad (b) \int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}} dx \quad (c) \int x \operatorname{arctg} x dx$$

4. (a) Oblicz całkę oznaczoną $\int_0^1 x e^{2x} dx$

(b) Oblicz całkę oznaczoną i podaj jej interpretację geometryczną $\int_0^\pi \cos 2x dx$

(c) Wyznacz pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach: $y = \ln x$, $y = 1 - x$, $x = \frac{1}{e}$.

Warunki zaliczenia Kolokwium 2: zad. 1,3,4 - dwa podpunkty, zad. 2