

ALGEBRA - Kolokwia przykładowe

K1 - rachunek macierzowy, układy równań, geometria analityczna

1. Oblicz wyznacznik:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Wyznacz A^{-1} i $A \cdot B^T$ (b) Rozwiąż równanie macierzowe: $A \cdot X = 2B + X$

3. Rozwiąż układy równań stosując poznane twierdzenia:

(a)
$$\begin{cases} x - 2y + z + u = 0 \\ -2x + 4y - z + 4u = 2 \end{cases}$$
 (b)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

4. (a) Niech $\mathbf{a} = [-2, -1, 1]$, $\mathbf{b} = [2, 0, 1]$. Wyznacz kąt między wektorami \mathbf{a} i \mathbf{b} . Oblicz pole trójkąta rozpiętego na wektorach \mathbf{a} i \mathbf{b} .

(b) Napisz równanie płaszczyzny π zawierającej punkt $P = (-3, 0, 2)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{n} = [2, 0, 1]$. Sprawdź, czy płaszczyzna ta jest równoległa/ prostopadła do prostej $l : x = 4t, y = 2, z = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}$.

5. (a) Pytanie teoretyczne (b) Pytanie teoretyczne

Warunki zaliczenia Kolokwium 1: zad. 1, zad. 2-5 - jeden podpunkt.

Przykłady pytań teoretycznych :

1. Podaj definicję grupy i przykład struktury która jest (nie jest) grupą.
2. Podaj definicję i przykłady ciała.
3. Sformułuj cztery wybrane własności mnożenia/dodawania macierzy.
4. Sformułuj definicję i dwie własności macierzy transponowanej/odwrotnej/jednostkowej.
5. Podaj cztery wybrane własności wyznaczników.
6. Sformułuj twierdzenie Cramera.
7. Podaj cztery własności rzędu macierzy.
8. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capellego.
9. Podaj definicję układu jednorodnego. Kiedy taki układ posiada rozwiązanie niezerowe?
10. Podaj definicję i dwie własności iloczynu skalarnego/iloczynu wektorowego/iloczynu mieszanego.
11. Podaj wzór na objętość równoległościanu rozpiętego na trzech różnych wektorach.
12. Podaj wzór na pole równoległoboku/trójkąta rozpiętego na dwóch wektorach.
13. Kiedy dwa wektory/proste/płaszczyzny są równoległe/prostopadłe?
14. Jak sprawdzić, czy trzy punkty są współliniowe?
15. Jak sprawdzić, czy trzy wektory są współpłaszczyznowe?
16. Podaj interpretację geometryczną układu równań: (a)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - z = 2 \end{cases}$$
 (b)
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

ALGEBRA - Kolokwia przykładowe

K2 - liczby zespolone, przestrzenie liniowe i przekształcenia liniowe

1. Rozwiąż równanie w dziedzinie zespolonej:
 - (a) $z^2 - (2i - 1)z - i = 0$,
 - (b) $z^3 - i = 0$.
2.
 - (a) Oblicz $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z+i}\right)$, jeśli $z = 2 - 2i$.
 - (b) Oblicz i zapisz w postaci kartezjańskiej $(-1 + i\sqrt{3})^{35}$.
 - (c) Naskicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(iz) < 1 \wedge |z + 1 + i| < 2\}$.
3. Niech $\phi(x, y) = [x - 2y, 3y]$.
 - (a) Wyznacz macierz przekształcenia ϕ oraz jego wartości własne.
 - (b) Wyznacz wektory własne przekształcenia ϕ dla wybranej wartości własnej λ .
4.
 - (a) Pytanie teoretyczne
 - (b) Pytanie teoretyczne

Warunki zaliczenia Kolokwium 2: zad. 1,3,4 - jeden podpunkt, zad. 2 - dwa podpunkty.

Przykłady pytań teoretycznych:

1. Podaj definicję postaci kartezjańskiej i trygonometrycznej liczby zespolonej.
2. Podaj definicję i interpretację geometryczną modułu liczby zespolonej.
3. Podaj definicję i interpretację geometryczną argumentu liczby zespolonej.
4. Podaj definicję i interpretację geometryczną sprzężenia liczby zespolonej.
5. Podaj definicję i interpretację geometryczną pierwiastków n -tego stopnia z liczby zespolonej.
6. Sformułuj zasadnicze twierdzenie algebry.
7. Co można powiedzieć o pierwiastkach wielomianu zespolonego $W(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$, jeśli $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $W(3 - i) = 0$ oraz $W(2 + i) = 0$.
8. Ile pierwiastków rzeczywistych/zespolonych może mieć wielomian zespolony stopnia trzeciego.
9. Podaj definicję i dwa przykłady przestrzeni liniowej.
10. Podaj definicję przekształcenia liniowego i przykład przekształcenia, które jest/ nie jest liniowe.
11. Uzasadnij, że przekształcenie $\phi(x, y) = [x - 2y, 3y]$ jest liniowe.
12. Uzasadnij, że przekształcenie $\phi(x, y) = [x - 2y, 3 + y]$ nie jest liniowe.
13. Podaj definicję wartości własnej i wektora własnego przekształcenia liniowego.