ANALIZA MATEMATYCZNA Z ELEMENTAMI STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH

Definicja 1. *Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem.* ***Metryką*** *w zbiorze A nazywamy funkcję rzeczywistą*

$$d : A \times A \to \mathbb{R}$$

spełniającą warunki:

1. $\displaystyle\bigwedge_{a_1,a_2\in A} d(a_1,a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2,$
2. $\displaystyle\bigwedge_{a_1,a_2\in A} d(a_1,a_2) = d(a_2,a_1),$
3. $\displaystyle\bigwedge_{a_1,a_2,a_3\in A} d(a_1,a_2) + d(a_2,a_3) \geqslant d(a_1,a_3).$

Zbiór A ze zdefiniowaną w nim metryką d nazywamy ***przestrzenią metryczną*** *i oznaczamy (A,d).*

Najbardziej naturalnymi, znanymi nam przestrzeniami metrycznymi są:

1. prosta rzeczywista $\mathbb{R}$ z metryką określoną wzorem
$$\bigwedge_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} d(x_1,x_2) = |x_2 - x_1|,$$
2. płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z metryką określoną wzorem
$$\bigwedge_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2},$$
3. przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z metryką określoną wzorem
$$\bigwedge_{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3} d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Metryki te nazywamy **metrykami euklidesowymi**.

Definicja 2. *Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z wprowadzoną w niej odpowiednią metryką euklidesową nazywamy* ***przestrzenią euklidesową*** *wymiaru n.*

Definicja 3. *Niech* (A, d) *będzie przestrzenią metryczną.* ***Kulą (otwartą)*** *o środku w punkcie* a_0 *i promieniu* $r > 0$ *w przestrzeni* A *nazywamy zbiór*

$$K(a_0, r) = \{a \in A : d(a, a_0) < r\}.$$

Definicja 4. *Niech* (A, d) *będzie przestrzenią metryczną i niech* $B \subseteq A$. *Punkt* $a \in B$ *nazywamy* ***punktem wewnętrznym zbioru*** B, *jeżeli istnieje kula* $K(a, r)$ *zawarta w zbiorze* A.

Definicja 5. *Zbiór* B *nazywamy* ***otwartym*** *w przestrzeni metrycznej* (A, d), *jeżeli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym.*

Twierdzenie 1. *Kula otwarta w przestrzeni metrycznej* (A, d) *jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.*

Definicja 6. *Zbiór* B *nazywamy* ***domkniętym*** *w przestrzeni metrycznej* (A, d), *jeżeli jego dopełnienie* $A \backslash B$ *jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.*

Definicja 7. *Niech* (A, d) *będzie przestrzenią metryczną.* ***Kulą domkniętą*** *o środku w punkcie* a_0 *i promieniu* $r > 0$ *w przestrzeni* A *nazywamy zbiór*

$$\bar{K}(a_0, r) = \{a \in A : d(a, a_0) \leqslant r\}.$$

Definicja 8. *Niepusty podzbiór* B *przestrzeni metrycznej* (A, d) *nazywamy* ***ograniczonym***, *jeżeli istnieje w przestrzeni* A *istnieje kula zawierająca ten zbiór. W przeciwnym razie zbiór nazywamy* ***nieograniczonym***.

Definicja 9. *Niech* (A, d) *będzie przestrzenią metryczną i niech* (a_n), $n \in \mathbb{N}$ *niech będzie ciągiem punktów tej przestrzeni. Ciąg* (a_n), $n \in \mathbb{N}$ *nazywamy* ***zbieżnym*** *w przestrzeni* (A, d) *do punktu* a_0, *jeżeli*

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a_0) = 0.$$

Fakt ten zapisujemy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a_0 \ .$$

Twierdzenie 2. *Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej jest ograniczony.*

Definicja 10. *Niech* (A, d) *będzie przestrzenią metryczną i niech* $B \subseteq A$. *Punkt* $a_0 \in B$ *nazywamy* ***punktem skupienia zbioru*** B, *jeżeli istnieje ciąg punktów zbioru* B *zbieżny do punktu* a_0.

Definicja 11. *Punkt* $a \in B$ *nazywamy* ***punktem izolowanym*** *zbioru* B, *jeżeli nie jest punktem skupienia zbioru* B.

Definicja 12. *Zbiór* B *nazywamy* ***zwartym*** *w przestrzeni metrycznej* (A, d), *jeżeli z każdego ciągu punktów zbioru* B *można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu zbioru* B.

Twierdzenie 3. *Podzbiór* B *przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}$ *jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Definicja 13. *Podzbiór B przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy* ***spójnym****, jeżeli każde jego dwa punkty można połączyć łamaną zawartą w zbiorze B.*
Definicja 14. *Podzbiór B przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy obszarem, jeżeli jest otwarty i spójny.*

Definicja 15. *Niech $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy* ***funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych o wartościach rzeczywistych****.*
Uwaga 1. *Jeśli nie umówimy się inaczej, to za dziedzinę uważamy dziedzinę naturalną, tzn. zbiór tych par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których wzór ma sens. Często w zastosowaniach praktycznych dziedzina jest ograniczona przez czynniki niematematyczne (np. rezystancja musi być dodatnia).*

Definicja 16. *Wykresem funkcji $z = f(x, y)$ określonej dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór*

$$W = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\Big\}.$$

Wykresem funkcji dwóch zmiennych jest pewna powierzchnia w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Definicja 17. *Niech będzie dany ciąg $(P_n) = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i niech $P_0 = (x_0, y_0)$ będzie punktem tej przestrzeni. Mówimy, że ciąg punktów (P_n) jest zbieżny do punktu P_0 albo, że granicą ciągu (P_n) jest P_0 , jeżeli ciąg odległości punktów (P_n) od punktu P_0 jest zbieżny do 0 czyli, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, P_0) = 0.$$

Zapisujemy to

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0.$$

Twierdzenie 4. *Jeżeli $(P_n) = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}$ jest ciągiem punktów przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i punkt $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, to*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Definicja 18. *Załóżmy, że $f : D \longrightarrow \mathbb{R},\quad D \subset \mathbb{R}^2$, i P_0 jest punktem skupienia zbioru D. Funkcja f ma w punkcie P_0 granicę g, gdy dla dowolnego ciągu $(P_n) = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}$ punktów zbioru D takiego, że $P_n \neq P_0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$, ciąg $f(P_n)$ ma granicę równą g , tzn.*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = g \iff \left(\bigwedge_{(P_n)\in D\setminus\{P_0\}\ n\in\mathbb{N}\wedge P_n\to P_0} \implies \lim_{n\to\infty} f(P_n) = g \right).$$

Uwaga 2. *Granicę zdefiniowaną powyżej nazywamy granicą podwójną, w odróżnieniu od granic iterowanych*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \qquad \textit{oraz} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Definicja 19. *Niech f będzie funkcją, której dziedziną jest pewien podzbiór D przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $P_0 \in D$. Mówimy, że funkcja jest ciągła w punkcie P_0 jeśli granica funkcji f w punkcie P_0 istnieje i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, co zapisujemy*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Twierdzenie 5. *Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie P_0 są funkcjami ciągłymi w tym punkcie. Iloraz funkcji ciągłych w punkcie P_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie, jeśli dzielnik ma w tym punkcie wartość różną od zera.*

Twierdzenie 6. *(Weierstrassa)*
Niech funkcja f będzie ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcja f jest wówczas ograniczona w tym obszarze i osiąga w tym obszarze wartość najmniejszą i największą.

Twierdzenie 7. *(własność Darboux)*
Jeśli funkcja ciągła w obszarze D przyjmuje w tym obszarze wartości A oraz B, i jeśli $A < L < B$ lub $A > L > B$, to istnieje w obszarze D punkt, w którym funkcja przyjmuje wartość L.

Twierdzenie 8. *Jeśli funkcja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie P_0 i ma w tym punkcie wartość $f(P_0) > A$, to istnieje otoczenie U punktu P_0 takie, że dla każdego $P \in D \cap U$ zachodzi nierówność $f(P) > A$.*

Uwaga 3. *Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli zmienimy kierunek obu nierówności.*
Wniosek 1. *Funkcja ciągła i różna od zera w pewnym punkcie zachowuje swój znak w otoczeniu tego punktu.*

Definicja 20. *Niech $\vec{h} = [h_1, h_2]$ będzie dowolnym wektorem i niech $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$.* ***Pochodną kierunkową*** *funkcji f w punkcie P_0 w kierunku wektora $\vec{h}$ nazywamy liczbę*

$$f'_{\vec{h}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th_1, y_0+th_2) - f(x_0,y_0)}{t} \ .$$

Definicja 21. *Niech $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$.* ***Pochodną cząstkową*** *funkcji f względem zmiennej x w punkcie $P_0 =$*

(x_0, y_0) *nazywamy pochodną kierunkową funkcji* f *w punkcie* $P_0 = (x_0, y_0)$ *w kierunku wektora* $[1, 0]$ *tzn. granicę*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} .$$

Pochodną cząstkową funkcji f *względem zmiennej* x *w punkcie* $P_0 = (x_0, y_0)$ *oznaczamy* $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$ *W skrócie pochodną* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *oznaczamy też* f'_x*.*

Definicja 22. *Niech* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu* $P_0 = (x_0, y_0)$*.* ***Pochodną cząstkową*** *funkcji* f *względem zmiennej* y *w punkcie* $P_0 = (x_0, y_0)$ *nazywamy pochodną kierunkową funkcji* f *w punkcie* $P_0 = (x_0, y_0)$ *w kierunku wektora* $[0, 1]$ *tzn. granicę*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} .$$

Pochodną cząstkową funkcji f *względem zmiennejx* x *w punkcie* (x_0, y_0) *oznaczamy* $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}$
W skrócie pochodną $\frac{\partial f}{\partial y}$ *oznaczamy też* f'_y*.*

Uwaga 4. *Z definicji pochodnych cząstkowych wynika, że obliczamy je stosując te same reguły różniczkowania jak dla funkcji jednej zmiennej, przy czym pochodną cząstkową funkcji* f *względem zmiennej* x*, obliczamy traktując* y *jako stałą, a pochodną cząstkową funkcji* f *względem zmiennej* y*, obliczamy traktując* x *jako stałą.*

Jeśli funkcja f ma w każdym punkcie obszaru D pochodną cząstkową f'_x, to f'_x jest funkcją określoną w obszarze D i można ją różniczkować względem zmiennej x lub zmiennej y. Otrzymane funkcje nazywać będziemy pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji f. Oznaczamy je następującymi symbolami:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{lub} \qquad f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{lub} \qquad f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{lub} \qquad f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{lub} \qquad f''_{xy}$$

Pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nazywamy pochodnymi mieszanymi rzędu drugiego.

Twierdzenie 9. *(Schwarza)*
Jeżeli pochodne mieszane f''_{xy} *i* f''_{yx} *istnieją i są ciągłe w punkcie* (x_0, y_0)*, to są one równe w tym punkcie.*

Uwaga 5. *O funkcji, która ma ciągłe pochodne rzędu* k*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$*, w pewnym obszarze* D *mówimy, że jest klasy* C_k *w tym obszarze.*

Definicja 23. *Załóżmy teraz, że funkcja* f *jest określona w pewnym otoczeniu punktu* (x_0, y_0)*. Mówimy, że funkcja* f *osiąga w punkcie* (x_0, y_0) *maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo* S *punktu* (x_0, y_0) *takie, że*

$$\bigwedge_{(x,y)\in S} f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \qquad \left(\bigwedge_{(x,y)\in S} f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)\right)$$

Gdy nierówności są ostre, to mówimy o maksimum (minimum) lokalnym właściwym.

Twierdzenie 10. *Twierdzenie (warunek konieczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych)*
Jeśli funkcja f *ma w punkcie* (x_0, y_0) *ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to obie pochodne cząstkowe 1 rzędu w tym punkcie są równe zeru*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Uwaga 6. *Punkty, w których funkcja spełnia warunek konieczny istnienia ekstremu lokalnego nazywamy* ***punktami stacjonarnymi*** *lub* ***krytycznymi*** *funkcji.*
Uwaga 7. *Warunek konieczny nie jest warunkiem wystarczającym.*

Definicja 24. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego w obszarze* D*. Wyróżnikiem funkcji* f *nazywamy funkcję*

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \qquad (x, y) \in D.$$

Twierdzenie 11. *(warunek wystarczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych)*
Jeśli funkcja $f(x, y)$ *jest klasy* C^2 *w pewnym otoczeniu punktu* (x_0, y_0) *i ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w tym punkcie równe zeru*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

oraz wyróżnik funkcji f jest w tym punkcie dodatni

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to funkcja ta ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum właściwe.
Charakter tego ekstremum zależy od znaku drugich pochodnych czystych w tym punkcie $f''_{xx}(x_0, y_0)$ lub $f''_{yy}(x_0, y_0)$ (w punkcie (x_0, y_0) mają one ten sam znak).
Jeśli są one dodatnie, to funkcja ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe, a jeśli ujemne – maksimum lokalne właściwe.
Twierdzenie 12. *Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) i ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w tym punkcie równe zeru*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

oraz wyróżnik funkcji f jest w tym punkcie ujemny

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0,$$

*to funkcja ta **nie ma** w punkcie (x_0, y_0) **ekstremum**.*
Definicja 25. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie (x_0, y_0).*
***Gradientem** funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor $\nabla f(x_0, y_0)$, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie (x_0, y_0), to znaczy*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left[f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right].$$

Inne oznaczenie gradientu to grad f.
Twierdzenie 13. *(związek pochodnej kierunkowej z gradientem) Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie (x_0, y_0) i $\vec{h} = [h_1, h_2]$ niech będzie dowolnym wektorem.*
Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie (x_0, y_0), w kierunku wektora $\vec{h}$ jest równa iloczynowi skalarnemu gradientu tej funkcji w punkcie (x_0, y_0) i wektora $\vec{h}$.

$$f'_{\vec{h}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} = \left[f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right] \cdot [h_1, h_2].$$

Definicja 26. *Niech $F(x, y)$ będzie funkcją określoną na pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Każdą funkcję $y = f(x)$ ciągłą na pewnym przedziale I taką, że istnieje punkt $x \in I$ taki, że $F(x, f(x)) = 0$ nazywamy **funkcją uwikłaną** określoną równaniem $F(x, y) = 0$.*
Równanie to nazywamy postacią uwikłaną funkcji $y = f(x)$.
Twierdzenie 14. *(o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej)*
Jeżeli F jest

1. *funkcją klasy C^1 na pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) ,*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$,*
3. *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,*

to

- *na pewnym otoczeniu* $U = \{(x,y):\ x_0-\delta<x<x_0+\delta, y_0-\eta<y<y_0+\eta\}$ *punktu* (x_0,y_0) *równanie* $F(x,y)=0$ *określa dokładnie jedną funkcję uwikłaną* $y=f(x)$*,*
- *funkcja ta dla* $x=x_0$ *przyjmuje wartość* y_0*, czyli* $f(x_0)=y_0$*,*
- *funkcja* f *jest ciągła na przedziale* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$*.*

Twierdzenie 15. *(o pochodnej funkcji uwikłanej)*
Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej, to funkcja uwikłana $y=f(x)$ *dana równaniem* $F(x_0,y_0)=0$ *ma na pewnym przedziale* $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ *ciągłą pochodną określoną wzorem*

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\ .$$

Twierdzenie 16. *(o drugiej pochodnej funkcji uwikłanej) Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej oraz funkcja* F *jest klasy* C^2 *na otoczeniu* U *punktu* (x_0,y_0)*, to funkcja uwikłana* $y=f(x)$ *dana równaniem* $F(x,y_0)=0$ *ma na pewnym przedziale* $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ *drugą pochodną określoną wzorem*

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{yy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}\ .$$

Twierdzenie 17. *(warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji uwikłanej)*
Jeżeli

1. *funkcja* F *jest klasy* C^2 *w pewnym otoczeniu punktu* (x_0,y_0)
2. $F(x_0,y_0)=0 \quad i \quad F'_x(x_0,y_0)=0,$
3. $F'_y(x_0,y_0)\neq 0,$
4. $I(x_0,y_0) = -\dfrac{F''_{xx}(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)} \neq 0,$

to funkcja uwikłana $y=f(x)$ *określona równaniem* $F(x,y)=0$ *i spełniająca warunek* $y(x_0)=y_0$ *ma w punkcie* x_0 *ekstremum lokalne równe* y_0*.*
Jest to maksimum, gdy $I(x_0,y_0)<0$*, zaś minimum, gdy* $I(x_0,y_0)>0$*.*

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 27. ***Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego*** *nazywamy równanie postaci*

$$F(x, y, y') = 0,$$

gdzie F jest pewną funkcją 3 zmiennych, w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$, i w którym występuje pochodna tej funkcji.

Definicja 28. *Równanie różniczkowe postaci*

$$y' = f(x, y),$$

gdzie f jest pewną funkcją dwóch zmiennych, określoną na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy równaniem różniczkowym rzędu pierwszego w ***postaci normalnej****.*

Definicja 29. ***Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną)*** *równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ w zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.*

Wykres każdego rozwiązania szczególnego równania różniczkowego nazywamy ***krzywą całkową*** *tego równania.*

Definicja 30. ***Zagadnieniem Cauchy'ego*** *dla równania różniczkowego rzędu pierwszego nazywamy następujące zagadnienie:*

`znaleźć całkę szczególną danego równania, która spełnia warunek początkowy`

$$y(x_0) = y_0$$

`przy czym liczby` x_0, y_0 `, zwane wartościami początkowymi, są dane.`

Definicja 31. ***Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną)*** *równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ nazywamy rodzinę (zbiór) krzywych całkowych tego równania zależną od jednego parametru, którego wartość można dobrać tak, aby otrzymać krzywą całkową spełniającą warunek początkowy*

$$y(x_0) = y_0$$

dla każdego układu wartości początkowych (x_0, y_0) , dla którego taka krzywa istnieje.

Definicja 32. ***Kierunkiem równania różniczkowego***

$$y' = f(x, y)$$

w punkcie (x_0, y_0) nazywamy prostą o współczynniku kierunkowym $f(x_0, y_0)$ przechodzącą przez punkt (x_0, y_0).

Definicja 33. ***Polem kierunków*** *równania różniczkowego*

$$y' = f(x, y)$$

nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $(x, y) \in D$ kierunku równania w tym punkcie.

Definicja 34. *Rozwiązanie szczególne* $y = g(x), \quad x \in (a, b)$ *nazywamy* ***rozwiązaniem regularnym*** *danego równania różniczkowego, jeżeli przez każdy punkt krzywej całkowej określonej tym rozwiązaniem nie przechodzi inne rozwiązanie tego równania.*
Definicja 35. *Rozwiązanie szczególne* $y = g(x), \quad x \in (a, b)$ *nazywamy* ***rozwiązaniem osobliwym*** *danego równania różniczkowego, jeżeli przez każdy punkt krzywej całkowej określonej tym rozwiązaniem przechodzi co najmniej jeszcze jedno, inne rozwiązanie tego równania.*

Równania różniczkowe rzędu pierwszego

Rozważmy równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

z niewiadomą funkcją $y = y(x)$.
Twierdzenie 18. *(Peano - o istnieniu rozwiązania)*
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ *jest ciągła w obszarze* $D \subset \mathbb{R}^2$*, to przez każdy punkt wewnętrzny tego obszaru przechodzi co najmniej jedna krzywa całkowa tego równania.*
Twierdzenie 19. *(Cauchy'ego - o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania)*
Jeżeli prawa strona równania $y' = f(x, y)$ *jest funkcją ciągłą w obszarze* D *oraz ma w tym obszarze ciągłą pochodną* $f'_y(x, y)$*, to przez każdy punkt wewnętrzny* (x_0, y_0) *tego obszaru przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.*

Wnioski z twierdzenia Cauchy'ego
Wniosek 2. *Krzywe całkowe równania* $y' = f(x, y)$ *nie przecinają się żadnym punkcie wewnętrznym obszaru* D*.*
Wniosek 3. *Każde rozwiązanie (krzywą całkową) równania* $y' = f(x, y)$ *można przedłużyć do brzegu obszaru* D*.*
Wniosek 4. *Jeżeli* $D = \{(x, y) : x \in (a, b) \wedge g_1(x) < y < g_2(x)\}$*, to przedział, w którym istnieje dane rozwiązanie szczególne, jest zawarty w przedziale* (a, b)*.*

Równania o zmiennych rozdzielonych

Definicja 36. *Niech* g *i* h *będą funkcjami rzeczywistymi, ciągłymi odpowiednio na przedziałach* (a, b) *oraz* (c, d) *(przedziały te mogą być skończone lub nieskończone).* ***Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych*** *nazywamy równanie postaci*

$$y' = h(x) \cdot g(y),$$

w którym niewiadomą funkcją jest funkcja $y = y(x)$*.*
Gdy $g(y) \neq 0$ *dla* $y \in (c, d)$*, równanie to możemy też zapisać w postaci*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Twierdzenie 20. *Jeżeli funkcje h i g będą funkcjami ciągłymi odpowiednio na przedziałach* (a,b) *oraz* (c,d) *oraz* $g(y)$ *jest różna od zera dla* $y \in (c,d)$, *to przez każdy punkt* (x_0, y_0) *obszaru*

$$D = \{(x,y) : a < x < b \ , \ c < y < d\}$$

przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $y = y(x)$ *równania*

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

spełniająca warunek $y(x_0) = y_0$.
Krzywa ta określona jest wzorem

$$y(x) = G^{-1}(H(x) - H(x_0) + G(y_0)) \qquad \text{dla każdego} \qquad x \in I \subset (a,b).$$

H *i* G *są dowolnymi funkcjami pierwotnymi odpowiednio funkcji* h *i* $\dfrac{1}{g}$.

Równania różniczkowe liniowe I rzędu

Definicja 37. *Równanie różniczkowe*

$$y' + p(x)y = f(x),$$

gdzie p(x) i f(x) są danymi funkcjami, ciągłymi w pewnym przedziale (a,b), *nazywamy* ***równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego***.
Równanie $y' + p(x)y = f(x)$ *nazywamy* ***jednorodnym***, *jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest tożsamościowo równa zeru w rozważanym przedziale. W przeciwnym przypadku, równanie nazywamy* ***niejednorodnym***.
Twierdzenie 21. *Jeżeli funkcja p(x) jest ciągła w przedziale (a,b), to całka ogólna równania* $y' + p(x)y = 0$ *jest postaci*

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R},$$

a ponadto przez każdy punkt (x_0, y_0) *obszaru*

$$P = \{(x,y) : a < x < b \ , \ c < y < d\}$$

przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.

Jeżeli znamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego uzyskamy stosując

- **metodę uzmienniania stałej** lub
- **metodę przewidywania**.

Pierwsza z nich jest metodą uniwersalną, zaś druga może być stosowana tylko wtedy, gdy funkcja p(x) jest stała, a prawa strona równania ma pewną szczególną postać.

Twierdzenie 22. *Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (RORN)* $y'+p(x)y = f(x)$ *może być zawsze przedstawione w postaci sumy dwóch rozwiązań:*

- *rozwiązania ogólnego równania jednorodnego* $y' + p(x)y = 0 \qquad (RORJ)$ *oraz*
- *rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego* $y' + p(x)y = f(x) \qquad (RSRN).$

W skrócie

RORN=RORJ+RSRN

Jedną z metod znajdowania rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN) jest **metoda przewidywania**, która może być stosowana tylko wtedy, gdy funkcja p(x) jest stała, a prawa strona równania ma postać

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right], \qquad m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 23. *Jeżeli w równaniu różniczkowym liniowym niejednorodnym*

$$y' + py = f(x), \quad p = const$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right], \qquad m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

to rozwiązanie szczególne (RSRN) tego równania przewidujemy w postaci

$$y_s = \begin{cases} e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right], & gdy\ \alpha \neq -p \\ x\cdot e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right] & gdy\ \alpha = -p \quad k = \max\{m, n\}. \end{cases}$$

Twierdzenie 24. *Jeżeli funkcja* $y_1(x)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$y' + py = f_1(x)\ \ dla\ x \in (a, b)\ ,$$

a funkcja $y_2(x)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$y' + py = f_2(x)\ \ dla\ x \in (a, b)\ ,$$

to funkcja $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$y' + py = f_1(x) + f_2(x)\ \ dla\ x \in (a, b).$$

Definicja 38. *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie postaci*

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

gdzie F *jest pewną funkcją* $n+2$ *zmiennych, w którym niewiadomą jest funkcja* $y(x)$*, i w którym występuje pochodna tej funkcji.*

Definicja 39. *Zagadnieniem Cauchy'ego dla równania różniczkowego rzędu n nazywamy następujące zagadnienie:*
znaleźć całkę szczególną danego równania, która spełnia warunki początkowe

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad , \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

przy czym liczby $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ zwane wartościami początkowymi są dane.
Uwaga 8. *Gdy $n = 1$, warunki początkowe redukują się do warunku*

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Definicja 40. *Całką ogólną równania różniczkowego rzędu n nazywamy rodzinę (zbiór) krzywych całkowych tego równania zależną od n parametrów, których wartości można dobrać tak, aby otrzymać krzywą całkową spełniającą warunki początkowe*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad , \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

dla każdego układu wartości początkowych $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, dla którego taka krzywa istnieje.
Definicja 41. *Równanie różniczkowe*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

gdzie $p(x)$,$q(x)$ i $f(x)$ są danymi funkcjami, ciągłymi w pewnym przedziale (a, b), nazywamy ***równaniem różniczkowym liniowym rzędu drugiego****.*
Równanie

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

nazywamy ***jednorodnym****, jeżeli funkcja $f(x)$ jest tożsamościowo równa zeru w rozważanym przedziale. W przeciwnym przypadku, równanie nazywamy* ***niejednorodnym****.*
Twierdzenie 25. *Jeżeli funkcje $y_1(x)$ oraz $y_2(x)$ są rozwiązaniami szczególnymi równania*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

dla $x \in (a, b)$, oraz C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi,
to funkcja

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

jest rozwiązaniem tego równania.
Uwaga 9. *Funkcja $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ nie musi być rozwiązaniem ogólnym tego równania.*
Definicja 42. *Funkcje $y_1(x)$ oraz $y_2(x)$ nazywamy* ***liniowo zależnymi*** *w przedziale $x \in (a, b)$, jeżeli istnieją takie stałe C_1 i C_2, nierówne zeru jednocześnie, że*

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0.$$

Funkcje $y_1(x)$ oraz $y_2(x)$ nazywamy ***liniowo niezależnymi*** *w przedziale $x \in (a, b)$, jeżeli nie są liniowo zależne w tym przedziale.*

Definicja 43. *Funkcje* $y_1(x)$ *oraz* $y_2(x)$ *są liniowo niezależne w przedziale* $x \in (a, b)$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

dla $x \in (a, b)$.
Wyznacznik występujący w tym twierdzeniu nazywamy ***wyznacznikiem Wrońskiego*** *lub* ***wrońskianem*** *pary funkcji* $y_1(x)$ *oraz* $y_2(x)$.
Twierdzenie 26. *Jeżeli funkcje* $y_1(x)$ *oraz* $y_2(x)$ *są liniowo niezależnymi w przedziale* $x \in (a, b)$ *rozwiązaniami równania*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

oraz C_1 *i* C_2 *są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, to dwuparametrowa rodzina funkcji*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

jest rozwiązaniem ogólnym tego równania.

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (*)$$

Równaniem charakterystycznym odpowiadającym równaniu różniczkowemu $(*)$, nazywamy równanie kwadratowe

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Twierdzenie 27.

1. *Jeżeli liczby rzeczywiste* r_1 *oraz* r_2 *są różnymi rzeczywistymi pierwiastkami równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne równania (*) ma postać*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

2. *Jeżeli liczba rzeczywista* r_0 *jest dwukrotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne równania (*) ma postać*

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x},$$

3. *Jeżeli liczby zespolone* $r_1 = \alpha + \beta i$ *oraz* $r_2 = \alpha - \beta i$ *są pierwiastkami równania charakterystycznego, to rozwiązanie ogólne równania (*) ma postać*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Twierdzenie 28. *Jeżeli w równaniu różniczkowym liniowym niejednorodnym*

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p = const., \quad q = const.$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right], \qquad m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

to rozwiązanie szczególne (RSRN) tego równania przewidujemy w postaci

$$y_s = x^j e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right],$$

gdzie gdzie $R_k(x)$ oraz $S_k(x)$ są nieznanymi wielomianami stopnia $k = \min\{m, n\}$ oraz j oznacza krotność pierwiastka $r = \alpha + i\beta$ równania charakterystycznego.

Twierdzenie 29. *Jeżeli funkcja $y_1(x)$ jest rozwiązaniem równania*

$$y'' + py' + qy = f_1(x) \ \ dla \ x \in (a, b) \ ,$$

a funkcja $y_2(x)$ jest rozwiązaniem równania

$$y'' + py' + qy = f_2(x) \ \ dla \ x \in (a, b) \ ,$$

to funkcja $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ jest rozwiązaniem równania

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x) \ \ dla \ x \in (a, b).$$