MATEMATYKA 1

MACIERZE I WYZNACZNIKI

Definicja 1. *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami.*
Zbiór $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$ wszystkich par uporządkowanych (a,b) takich, że $a \in A$ i $b \in B$ nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B.
Definicja 2. *Rzeczywistą macierzą prostokątną o m wierszach i n kolumnach nazywamy funkcję o wartościach rzeczywistych określoną na iloczynie kartezjańskim $\{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$.*

Macierze oznaczamy dużymi, pogrubionymi literami alfabetu i zapisujemy w postaci tablicy prostokątnej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O takiej macierzy mówimy, że ma wymiar $m \times n$. Symbol a_{ij} oznacza element macierzy (liczbę), który znajduje się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie.
Często macierze zapisujemy w postaci skróconej $A = [a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$.
Gdy $m = n$, macierz nazywamy macierzą kwadratową stopnia n.
Definicja 3. *Elementy a_{ii} macierzy $[a_{ij}]_{i,i \leqslant n}$ tworzą główną przekątną macierzy zwaną też diagonalą, a same nazywane są elementami diagonalnymi.*
Definicja 4. *Macierzą zerową nazywamy macierz $0 \in M_{(m,n)}$, której wszystkie elementy są zerami.*
Uwaga 1. *Wymiar macierzy zerowej zwykle wynika z kontekstu*
Definicja 5. *Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową spełniającą warunek:*

$$a_{ij} = 0, gdy i \neq j.$$

Oznaczenia:
$M_{(m,n)}(\mathbb{R})$- zbiór macierzy rzeczywistych o m wierszach i n kolumnach,
$M_n(\mathbb{R})$ zbiór macierzy rzeczywistych stopnia n.
Definicja 6. *Niech $A \in M_{(m,n)}$. Macierzą transponowaną do macierzy $A = [a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ nazywamy macierz*

$$A^T = [a_{ji}]_{j \leqslant n, i \leqslant n}$$

Definicja 7. *Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową spełniającą warunek:*

$$a_{ij} = 0, gdy i \neq j$$

Definicja 8. *Macierzą jednostkową (identycznościową) stopnia n nazywamy macierz diagonalną, której wszystkie elementy na przekątnej są równe 1:*

$$1_n = diag(1, 1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Uwaga 2. *Macierz jednostkową oznaczamy 1_n. Kiedy 1 pojawia się bez indeksu, stopień macierzy wynika z kontekstu. Często używa się też oznaczeń I_n oraz I.*

Definicja 9. *Macierzą symetryczną nazywamy macierz kwadratową A, która spełnia warunek $A = A^T$, tzn., gdy*

$$\bigwedge_{i,j \in 1,\ldots,n} a_{ij} = a_{ji}.$$

Definicja 10. *Sumą macierzy $A = [a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ oraz $B = [b_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ nazywamy macierz*

$$A + B = [a_{ij} + b_{i,j}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$$

Definicja 11. *Iloczynem macierzy $A = [a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ przez liczbę (rzeczywista lub zespoloną) k nazywamy macierz*

$$k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$$

Definicja 12. *Iloczynem $A \cdot B$ macierzy $A = [a_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant p}$ przez macierz $B = [b_{ij}]_{i \leqslant p, j \leqslant n}$ nazywamy macierz $C = [c_{ij}]_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ której elementy określone są wzorami:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Uwaga 3. *Aby pomnożyć dwie macierze liczba kolumn pierwszej z nich musi być równa liczbie wierszy drugiej macierzy!*

Twierdzenie 1. *Dla dowolnych macierzy rzeczywistych A, B, C oraz stałych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, prawdziwe są równości (zakładamy, że wymiary macierzy pozwalają na wykonanie wskazanych działań):*

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$,
4. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$,
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$,
6. $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$,

7. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = (A \cdot B) \cdot \alpha$,
8. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
9. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,
10. $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$,
11. $A \cdot B \neq B \cdot A$
12. $(A^T)^T = A$,
13. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$,

Definicja 13. *Niech $A = [a_{ij}]_{i,j \leqslant n}$ będzie macierzą rzeczywistą stopnia n. Wyznacznikiem macierzy A nazywamy liczbę $detA$ określoną następująco:*

1. $detA = a_{11}, \quad gdy\ n = 1$
2. $detA = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \cdot a_{1k} \cdot A_{1k}$, *gdy* $n > 1$,

gdzie A_{1k} jest wyznacznikiem macierzy stopnia $(n-1)$ powstałej z macierzy A przez usunięcie pierwszego wiersza oraz k-tej kolumny.

Liczbę $A^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$ nazywamy dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A.
Wyznacznik macierzy stopnia n nazywamy wyznacznikiem stopnia n.

Definicja 14. *Macierzą dopełnień algebraicznych macierzy $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ nazywamy macierz $\left[A^*_{ij}\right]_{i,j \leqslant n}$ której elementami są dopełnienia algebraiczne elementów macierzy A*

Twierdzenie 2. *(Laplace)*
Wartość wyznacznika macierzy kwadratowej jest równa sumie iloczynów kolejnych elementów dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) przez odpowiadające im dopełnienia algebraiczne.

Twierdzenie 3. *Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi stopnia n, to*

1. $\det \left(A^T\right) = detA$,
2. $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A) = \det A \cdot \det B$.

Twierdzenie 4. *Wartość wyznacznika jest równa zero, gdy*

1. *wszystkie elementy dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) są równe zero lub*
2. *dwa wiersze (lub dwie kolumny) są identyczne lub*
3. *wszystkie elementy pewnego wiersz (lub pewnej kolumny) są proporcjonalne do odpowiednich elementów innego wiersza (kolumny) lub*
4. *dowolny wiersz (lub dowolna kolumna) jest kombinacją liniową pozostałych wierszy (kolumn).*

Twierdzenie 5. *Wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej (górnej) jest równy iloczynowi elementów diagonalnych tej macierzy (elementów leżących na głównej przekątnej).*
Twierdzenie 6. *Wartość wyznacznika nie zmieni się, gdy do elementów pewnego wiersza (lub pewnej kolumny) dodamy odpowiednie elementy innego wiersz (kolumny) pomnożone przez tę sama liczbę.*
Twierdzenie 7. *Pomnożenie wyznacznika przez dowolną liczbę jest równoważne pomnożeniu przez tę liczbę dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) tego wyznacznika.*
Definicja 15. *Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A (odwrotną względem macierzy A), gdy*

$$A \cdot B = B \cdot A = 1_n$$

Uwaga 4. *Jeżeli macierz B istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie.*
Definicja 16. *Macierzą nieosobliwą nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik jest rożny od zera.*
Definicja 17. *Macierzą osobliwą nazywamy macierz kwadratową, której wyznacznik jest równy zero.*
Twierdzenie 8. *Macierz kwadratowa $A \in M_n(\mathbb{R})$ posiada macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.*
Twierdzenie 9. *Jeżeli macierz kwadratowa $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest nieosobliwa, to macierz odwrotna $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ jest postaci*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot A^D$$

gdzie A^D jest macierzą dołączoną macierzy A, czyli transponowaną macierzą dopełnień elementów macierzy A.

Rozważmy równania

$$\begin{gathered} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad |\mathbf{A}^{-1} \cdot \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad | \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \end{gathered}$$

UKŁADY RÓWNAŃ

Definicja 18. *Układem m równań liniowych o n niewiadomych nazywamy układ równań postaci*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Z układem równań (1) związane są cztery ważne macierze:

macierz współczynników przy niewiadomych

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

macierz niewiadomych

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

macierz wyrazów wolnych

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

oraz macierz uzupełniona

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

która powstaje przez dopisanie do macierzy współczynników kolumny macierzy wyrazów wolnych.

Uwaga 5. *Układ równań (1) można równoważnie zapisać w postaci równania macierzowego*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Definicja 19. *Układ równań (1), w którym macierz B złożona jest z samych zer nazywamy jednorodnym.*
Twierdzenie 10. *(Cramera)*
Układ n równań liniowych z n niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy macierz współczynników przy niewiadomych jest nieosobliwa.
Rozwiązanie to wyraża się wzorami Cramera

$$x_i = \frac{A_i}{det\mathbf{A}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

gdzie A_i jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy $\mathbf{A}$ przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych (macierzą kolumnową $\mathbf{B}$).
Wniosek 1. *Jednorodny układ n równań liniowych z n niewiadomymi o nieosobliwej macierzy współczynników przy niewiadomych ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest to rozwiązanie zerowe.*
Definicja 20. *Minorem stopnia k macierzy $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\quad k \leqslant \min\{m, n\}$ nazywamy wyznacznik dowolnej macierzy kwadratowej stopnia k powstałej przez usunięcie z macierzy A $(m - k)$ wierszy i $(n - k)$ kolumn*
Definicja 21. *Niech $A \in M_{(m,n)}(\mathbb{C})$. Rzędem macierzy A nazywamy liczbę r, gdy w macierzy tej istnieje niezerowy minor stopnia r i jednocześnie nie istnieje w tej macierzy niezerowy minor stopnia wyższego niż r. Rząd macierzy oznaczamy $r(A)$.*
Uwaga 6. *Wprost z definicji wynika, że jeśli macierz $A \in M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ (macierz ma m wierszy oraz n kolumn), to*

$$0 \leqslant r(A) \leqslant \min\{m, n\}.$$

Twierdzenie 11. *Jeżeli $r(A) = r$, to $r(A^T) = r$.*
Twierdzenie 12. *Rząd macierzy nie zmieni się jeżeli:*

1. *usuniemy wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer,*
2. *usuniemy jeden z dwóch identycznych lub proporcjonalnych wierszy,*
3. *usuniemy jedną z dwóch identycznych lub proporcjonalnych kolumn,*
4. *dodamy do elementów pewnego wiersza (lub kolumny) odpowiednie elementy innego wiersza (lub kolumny) pomnożone przez tę samą liczbę,*
5. *pomnożymy (lub podzielimy) elementy dowolnego wiersza (lub kolumny) przez dowolną liczbę różną od zera.*

Twierdzenie 13. *(Kronecker-Capella) Układ równań zawierający* m *równań oraz* n *niewiadomych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy współczynników przy niewiadomych jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej.*
Rozwiązanie to jest zależne od liczby parametrów równej różnicy pomiędzy liczbą niewiadomych a wspólnym rzędem macierzy.
W przypadku, gdy wspomniane rzędy są różne układ jest sprzeczny.

Procedura wyznaczania rozwiązania (rozwiązań) w przypadku, gdy istnieje jest następująca:

1. ustalamy wspólny rząd r macierzy współczynników A i macierzy uzupełnionej U,
2. w macierzy A znajdujemy różny od zera minor stopnia r,
3. odrzucamy równania nie objęte tym minorem (jeśli minor obejmuje wszystkie równania, to oczywiście żadnego nie odrzucamy),
4. nieobjęte tym minorem niewiadome traktujemy jako parametry (jeśli minorem objęte są wszystkie parametry, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie),
5. uzyskany w ten sposób układ równań rozwiązujemy dowolną metodą (np. stosując wzory Cramera).

Ciągi liczbowe

Definicja 22. *Rzeczywistym nieskończonym ciągiem liczbowym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych*

$$f \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \mapsto a_n \ .$$

Ciąg oznaczamy krócej symbolem (a_n) *lub* $a_1, a_2, \dots a_n \dots$.
Ciągi, których wyrazy są funkcjami nazywamy ciągami funkcyjnymi.

Definicja 23. *Ciąg liczbowy* (a_n) *nazywamy:*
***stałym**, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} = a_n$,

***rosnącym**, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} > a_n$,

***malejącym**, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} < a_n$,

***nierosnącym**, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \leqslant a_n$,

***niemalejacym**, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \geqslant a_n$.

Definicja 24. *Ciąg liczbowy* (a_n) *nazywamy:*
***ograniczonym z dołu**, jeżeli*

$$\bigvee_{m\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant m \ ,$$

***ograniczonym z góry**, jeżeli*

$$\bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant M,$$

***ograniczonym**, jeżeli*

$$\bigvee_{m,M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Definicja 25. *Ciąg* a_n *ma granicę właściwą* g*, jeżeli w każdym otoczeniu* $(g-\epsilon, g+\epsilon)$ *liczby* g*, gdzie* $\epsilon > 0$*, leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu, tzn. wszystkie począwszy od pewnego wskaźnika* N_0.

Fakt, że ciąg (a_n) *ma granicę* g *zapisujemy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ *lub* $a_n \longrightarrow g$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>N_0} |a_n - g| < \epsilon.$$

Ciąg, który ma granicę właściwą nazywamy zbieżnym.

Twierdzenie 14. *Ciąg ma co najwyżej jedna granicę.*

Twierdzenie 15. *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Uwaga 7. *Jeżeli ciąg jest ograniczony, to nie musi być zbieżny!*

Twierdzenie 16. *Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.*

Definicja 26.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>K} a_n > M \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>K} a_n < M \right)$$

Twierdzenie 17. *(o trzech ciągach)*
Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

oraz

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \ ,$$

to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ *oraz*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Twierdzenie 18. *Jeżeli ciągi* (a_n) *i* (b_n) *mają granice właściwe* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ *oraz* $k \in \mathbb{R}$, *to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot A$,

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n} \right) = \dfrac{A}{B}$, *gdy* $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \neq 0$ *oraz* $B \neq 0$.

Twierdzenie 19. *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest zbieżny do zera i ciąg* (b_n) *jest ograniczony, to ciąg i* $(a_n \cdot b_n)$ *jest zbieżny do zera.*

Twierdzenie 20. *Prawdziwe są wzory:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \textit{nie istnieje dla} \quad q \leqslant -1, \\ 0 \quad \textit{dla} \quad q \in (-1,1) \\ 1 \quad \textit{dla} \quad q = 1, \\ +\infty \quad \textit{dla} \quad q > 1. \end{cases}$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0 \quad \textit{dla} \quad \alpha < 0 \\ 1 \quad \textit{dla} \quad \alpha = 0, \\ +\infty \quad \textit{dla} \quad \alpha > 0. \end{cases}$,

Twierdzenie 21. *Prawdziwe są wzory:*

1. $\bigwedge\limits_{a>0} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1, \quad k > 0,$

3. $\left(\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant 0 \ \wedge \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0 \right) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$

Twierdzenie 22. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = A$ *oraz* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n = \pm\infty$*, to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \pm\infty,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \pm\infty, \quad A \neq 0,$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = 0, \quad$ *gdy* $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \neq 0.$

Twierdzenie 23. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$ *oraz* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n = +\infty$*, to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty,$

Twierdzenie 24. *Jeżeli* $\bigvee\limits_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge\limits_{N>K} a_n > 0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Symbole nieoznaczone

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty}$$

Definicja 27.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\ .$$

Twierdzenie 25. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$*, to*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}\ .$$

Uwaga 8. *Logarytm, którego podstawą jest liczba e nazywamy **logarytmem naturalnym** i oznaczamy symbolem* ln*, np.*

$$\log_e 7 = \ln 7.$$

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Definicja 28. *Otoczeniem o promieniu $\epsilon > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$U(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Definicja 29. *Sąsiedztwem o promieniu $\epsilon > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy otoczenie o promieniu ϵ punktu x_0 pozbawione punktu x_0, czyli zbiór*

$$S(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Definicja 30. *Otoczeniem nieskończoności nazywamy zbiór*

$$U(\infty) = (a, \infty) \quad \textit{dla dowolnego } a \in \mathbb{R}.$$

Definicja 31. *Otoczeniem minus nieskończoności nazywamy zbiór*

$$U(-\infty) = (-\infty, a) \quad \textit{dla dowolnego } a \in \mathbb{R}.$$

Definicja 32. *Sąsiedztwem prawostronnym (lewostronnym) o promieniu ϵ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$S(x_0^+, \epsilon) = (x_0, x_0 + \epsilon) \quad \Big(S(x_0^-, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0)\Big).$$

Definicja 33. *(Heine)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to x_0, \ x_n \in S(x_0)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 34. *(równoważna, Cauchy)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} [(0 < |x - x_0| < \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon]$$

Definicja 35. *(granicy niewłaściwej)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to x_0, \ x_n \in S(x_0)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \pm\infty$$

Definicja 36. *(granicy w punkcie niewłaściwym)*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to \infty, \ x_n \in S(\infty)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 37. *(granicy w punkcie niewłaściwym)*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to -\infty, \ x_n \in S(-\infty)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 38. *(granicy lewostronnej)*
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n)\to x_0,\ x_n\in S(x_0^-)} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Definicja 39. *(granicy prawostronnej)*
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n)\to x_0,\ x_n\in S(x_0^+)} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Definicja 40. *Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Prostą $x = x_0$ nazywamy*

- ***asymptotą lewowostronną*** *funkcji f, jeżeli* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$
- ***asymptotą prawostronną*** *funkcji f, jeżeli* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

Definicja 41. *Prostą $y = ax + b$ nazywamy* ***asymptotą ukośną w minus nieskończoności*** *funkcji $f(x)$, jeżeli*
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Definicja 42. *Prostą $y = ax + b$ nazywamy* ***asymptotą ukośną w plus nieskończoności*** *funkcji $f(x)$, jeżeli*
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Twierdzenie 26.

Definicja 43. ***Punktem izolowanym*** *zbioru D nazywamy każdy punkt $x_0 \in D$, dla którego istnieje sąsiedztwo $S(x_0$ rozłączne ze zbiorem D.*

Definicja 44. *Funkcję $f : X \to Y$ określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 nazywamy* ***ciągłą w punkcie*** *x_0, jeżeli ma w tym punkcie granicę równa swojej wartości w tym punkcie, tzn. jeżeli*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)$$
lub, gdy punkt x_0 jest punktem izolowanym dziedziny funkcji f.

Definicja 45. *Jeżeli*
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$
to funkcję f nazywamy ***lewostronnie ciągłą w punkcie*** *x_0,*
a jeżeli
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$
to funkcję f nazywamy ***prawostronnie ciągłą w punkcie*** *x_0.*

Definicja 46. *(nieciągłości I rodzaju)*
Mówimy, że punkt x_0 jest ***punktem nieciągłości I rodzaju*** *funkcji f, jeżeli funkcja nie jest ciągła w tym punkcie oraz granice lewo- i prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 są skończone.*
Definicja 47. *(nieciągłości II rodzaju)*
Mówimy, że punkt x_0 jest ***punktem nieciągłości II rodzaju*** *funkcji f, jeżeli funkcja nie jest ciągła w tym punkcie oraz jedna z granic lewo- lub prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 jest nieskończona lub nie istnieje.*
Twierdzenie 27. *Jeżeli dwie funkcje f i g są określone na pewnym otoczeniu punktu x_0 i obie są ciągłe w punkcie x_0 oraz $a \in \mathbb{R}$, to w tym punkcie są ciągłe także funkcje*

$$a \cdot f, \quad f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

przy czym ta ostatnia przy założeniu, że $g(x) \neq 0$.
Twierdzenie 28. *(o ciągłości funkcji złożonej)*
Jeżeli funkcja $f(g)$ jest złożeniem funkcji $g : X \to Y$ oraz $f : Y \to Z$, a ponadto funkcja g jest ciągła w punkcie x_0, a funkcja f jest ciągła w punkcie $g(x_0)$, to funkcja $f(g(x))$ jest ciągła w punkcie x_0.
Definicja 48. *Funkcję nazywamy ciągłą w zbiorze $A \subset X$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.*
Definicja 49. *Funkcję nazywamy ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie a i lewostronnie ciągła w punkcie b.*
Definicja 50. *Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcję tożsamościową $x \mapsto x$, funkcje wykładnicze, funkcje trygonometryczne oraz wszystkie funkcje, które można z nich otrzymać za pomocą ograniczania dziedziny (obcinania), dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, składania i odwracania funkcji.*
Twierdzenie 29. *Funkcje elementarne są ciągłe.*
W szczególności ciągłe są wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze, funkcje logarytmiczne, funkcje trygonometryczne, funkcje hiperboliczne, funkcje cyklometryczne.
Twierdzenie 30. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale swoja wartość najmniejszą i największą (w szczególności jest ograniczona).*
Twierdzenie 31. *(o lokalnym zachowaniu znaku)*
Jeżeli funkcja w pewnym punkcie jest ciągła i dodatnia (ujemna), to jest również dodatnia (ujemna) w pewnym otoczeniu tego punktu.
Twierdzenie 32. *(własność Darboux)*
Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią między wartościami na końcach przedziału. Innymi słowy,

$$(f(a) = A \wedge f(b) = B) \quad \Rightarrow \quad \bigwedge_{M \in (A,B)} \bigvee_{c \in (a,b)} f(c) = M.$$

Twierdzenie 33. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ oraz jej wartości na krańcach tego przedziału $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków, to istnieje taki punkt $c \in (a,b)$ (co najmniej jeden), że $f(c) = 0$.*

Pochodna funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

Definicja 51. *Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na przedziale (a, b) i niech x_0 oraz x będą dwoma różnymi punktami tego przedziału. Wyrażenie*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*nazywamy **ilorazem różnicowym** odpowiadającym przyrostowi argumentu $x - x_0$.*

Definicja 52. *Jeżeli istnieje granica ilorazu różnicowego $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, gdy $x \to x_0$, to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji** f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$, tzn.*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jeśli granica ta nie istnieje mówimy, ze funkcja f nie posiada pochodnej w punkcie x_0.

Definicja 53. *O funkcji posiadającej pochodną w punkcie x mówimy, że jest **różniczkowalna** w tym punkcie.*

Definicja 54. *Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru X, to funkcję $x \mapsto f'(x)$ nazywamy **funkcją pochodną** (krótko, pochodną) funkcji f w zbiorze X i oznaczamy f'. Mówimy wówczas, że funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze X.*

Twierdzenie 34. *Jeśli funkcja f posiada pochodną w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągłą.*

Uwaga 9. *Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 nie wynika istnienie jej pochodnej w tym punkcie.*

Twierdzenie 35. *Jeżeli funkcje f i g określone na pewnym przedziale (a, b) posiadają pochodne
w punkcie x oraz $k \in \mathbb{R}$, to funkcje $k \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ oraz $\frac{f}{g}$ posiadają pochodne w punkcie x oraz prawdziwe są wzory:*

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Pochodne funkcji elementarnych

$(a)' = 0,$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z},$

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$

$(ax+b)' = a,$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},$

$(\sin x)' = \cos x,$

$(\cos x)' = -\sin x,$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ ,$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\ ,$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ ,$

$(e^x)' = e^x,$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}\ ,$

$(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}\ .$

Twierdzenie 36. *(o pochodnej funkcji złożonej) Jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0, a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $u_0 = g(x_0)$, to funkcja złożona $f \circ g = f(g)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz jej pochodna określona jest wzorem:*

$$[f(g(x_0))]' = f'(u_0) \cdot g'(x_0).$$

Twierdzenie 37. *(o pochodnej funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja f jest ciągła i sciśle monotoniczna na przedziale (a, b) oraz ma pochodną różną od zera w punkcie x_0 tego przedziału, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x_0)$ oraz jej pochodna określona jest wzorem:*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Definicja 55. *Jeżeli pochodna f' funkcji f jest różniczkowalna w zbiorze X, to jej pochodną nazywamy* ***pochodną rzędu drugiego*** *funkcji f i oznaczamy symbolem f''.*

Uwaga 10. *Analogicznie (za pomocą indukcji matematycznej) określamy pochodne wyższych rzędów.*

Definicja 56. *Niech funkcja f będzie różniczkowalna w pewnym otoczeniu danego punktu x_0, zaś $\Delta x \neq 0$, niech oznacza dowolny przyrost argumentu x.* ***Różniczką*** *funkcji f w punkcie x_0 nazywamy wyrażenie*

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x.$$

Uwaga 11.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Twierdzenie 38. *(Rolle'a)*
Jeżeli

1. *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$,*
2. *funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b),*
3. *$f(a) = f(b)$,*

to istnieje (przynajmniej jeden) punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie 39. *(Lagrange'a)*
Jeżeli

1. *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$,*
2. *funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b),*

to istnieje (przynajmniej jeden) punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Twierdzenie 40. *(Wnioski z twierdzenia Lagrange'a)*

1) *Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest stała w przedziale (a, b),*

2) *jeżeli funkcje f i g mają równe pochodne w przedziale (a, b), to funkcje te różnią się w tym przedziale co najwyżej o stałą,*

3) *jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w tym przedziale,*

4) *jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w tym przedziale,*

5) *jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest niemalejąca w tym przedziale,*

6) *jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest nierosnąca w tym przedziale.*

Twierdzenie 41. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to jest ona rosnąca w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{x \in (a,b)} f'(x) \geqslant 0$$

i zbiór $\{x : f'(x) = 0\}$ nie zawiera przedziału.

Twierdzenie 42. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to jest ona malejąca w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{x \in (a,b)} f'(x) \leqslant 0$$

i zbiór $\{x : f'(x) = 0\}$ nie zawiera przedziału.

Twierdzenie 43. *(Wzór Taylora) Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu n w przedziale $[a, b]$ i ciągłą pochodną rzędu $(n + 1)$ w przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Ostatni składnik

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

nazywamy resztą w postaci Lagrange'a.

Gdy przyjmiemy $a = 0$ oraz $b = x$, to wzór Taylora przyjmuje postać

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

i nosi nazwę wzoru **Maclaurina**.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \; + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + R_n(x), \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 \ldots \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x), \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = (1+(-x))^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n(x) \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

Definicja 57. *Załóżmy teraz, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 takie, że*

$$\bigwedge_{x\in S(x_0)} f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \left(\bigwedge_{x\in S(x_0)} f(x_0) \leqslant f(x)\right)$$

Gdy nierówności są ostre, to mówimy o ***maksimum (minimum) lokalnym właściwym****.*
Twierdzenie 44. *Fermata (warunek konieczny istnienia ekstremum)*
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.
Uwaga 12. *Warunek konieczny nie jest jednak warunkiem wystarczającym, gdyż np. funkcja $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 0$ ma pochodną równą zero, a nie ma ekstremum.*
Twierdzenie 45. *(I warunek wystarczający istnienia ekstremum)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0, \epsilon)$ punktu x_0 oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, to funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe.
Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0, \epsilon)$ punktu x_0 oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, to funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 46. *(II warunek wystarczający istnienia ekstremum)*
Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz

1. $f'(x_0) = 0$,
2. $f''(x_0) \neq 0$,
3. *pochodna drugiego rzędu x_0 jest ciągła w punkcie x_0,*

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne. Jest to maksimum, gdy $f''(x_0) < 0$, a minimum, gdy $f''(x_0) > 0$.
Twierdzenie 47. *(II warunek wystarczający istnienia ekstremum - uogólnienie)*
Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
3. *pochodna rzędu n jest ciągła w punkcie x_0,*

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, gdy n jest liczbą parzystą. Jest to maksimum, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.
Gdy n jest liczbą nieparzystą, funkcja f nie osiąga ekstremum lokalnego w tym punkcie.
Definicja 58. *Niech zbiór A będzie podzbiorem dziedziny funkcji rzeczywistej f. Powiemy, że funkcja f osiąga* ***maksimum (minimum) absolutne*** *w punkcie $x_0 \in A$, jeżeli*

$$\bigwedge_{x\in A} f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \left(\bigwedge_{x\in A} f(x_0) \leqslant f(x) \right).$$

Definicja 59. *Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest* ***wypukła*** *w punkcie x_0, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$, że dla każdego $x \in S(x_0)$ punkty tej krzywej leżą powyżej stycznej poprowadzonej w punkcie x_0 .*
Definicja 60. *Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest* ***wklęsła*** *w punkcie x_0, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$, że dla każdego $x \in S(x_0)$ punkty tej krzywej leżą poniżej stycznej poprowadzonej w punkcie x_0 .*
Twierdzenie 48. *(warunek wystarczający)*
Jeżeli pochodna drugiego rzędu funkcji f jest dodatnia (ujemna) w przedziale (a, b) , to krzywa $y = f(x)$ jest wypukła (wklęsła) w tym przedziale.
Definicja 61. *Punkt x_0 nazywamy* ***punktem przegięcia*** *krzywej f , jeśli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, \epsilon)$ punktu x_0, że krzywa jest wypukła (wklęsła) dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ oraz wklęsła (wypukła) dla $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Inaczej punkt, w którym styczna przechodzi z nad krzywej pod nią, lub odwrotnie.*
Twierdzenie 49. *(warunek konieczny istnienia punktu przegięcia) Jeżeli krzywa f ma w punkcie x_0 punkt przegięcia i istnieje ciągła pochodna drugiego rzędu funkcji f w pewnym otoczeniu punktu x_0 , to $f''(x_0) = 0$.*

Uwaga 13. *Warunek konieczny nie jest warunkiem wystarczającym.*
Twierdzenie 50. *(I warunek wystarczający)*
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w otoczeniu $U(x_0,\epsilon)$ i dwukrotnie różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0,\epsilon)$ oraz $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$ dla $x \in (x_0-\epsilon, x_0)$ oraz $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$ dla $x \in (x_0, x_0+\epsilon)$, to punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$.
Twierdzenie 51. *(REGUŁA DE L'HOSPITALA) Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie $S(x_0)$ punktu x_0, $g(x) \neq 0$ dla $S(x_0)$ oraz*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

i istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub nie),
to istnieje również granica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ przy czym

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 14. *Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.*

Uwaga 15. *Modyfikując odpowiednio założenia twierdzenie pozostaje prawdziwe dla symbolu $\dfrac{\infty}{\infty}$ oraz w przypadku granic jednostronnych przy $x \to \infty$ i $x \to -\infty$.*

Aby zastosować regułę de l'Hospitala do wyrażeń nieoznaczonych typu $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ stosujemy odpowiednio tożsamości:

$$f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{lub} \quad f(x)\cdot g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}}\cdot g(x).$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} - \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}.$$

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Definicja 62. *Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym przedziale I. Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy każdą funkcję F, która jest różniczkowalna w przedziale I oraz spełnia warunek*

$$\bigwedge_{x\in I} F'(x) = f(x).$$

Twierdzenie 52. *Jeżeli funkcja $F(x)$ jest w pewnym przedziale funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to każda funkcja postaci $F(x)+C$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą, jest również funkcją pierwotną funkcji $f(x)$. Co więcej, wszystkie funkcje pierwotne funkcji $f(x)$ mają tę postać, to znaczy różnią się co najwyżej o stałą.*

Definicja 63. *Wyrażenie $F(x)+C$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ i oznaczamy symbolem*

$$\int f(x)dx.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, a iloczyn $f(x)dx$ wyrażeniem podcałkowym.

Twierdzenie 53. *1. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada funkcję pierwotną na przedziale I, to*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad dla \quad x \in I.$$

2. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada ciągłą pochodną na przedziale I, to

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad dla \quad x \in I.$$

Twierdzenie 54. *Każda funkcja ciągła na przedziale I, posiada funkcję pierwotną na tym przedziale.*

Twierdzenie 55. *(o liniowości całki nieoznaczonej Jeżeli funkcje f oraz g posiadają funkcje pierwotne na pewnym przedziale I oraz k jest dowolną liczbą rzeczywistą, to*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

(Sformułowanie równoważne) Jeżeli funkcje f oraz g posiadają funkcje pierwotne na pewnym przedziale I oraz a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]dx = a \cdot \int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx.$$

Wzory podstawowe

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha} x^{1+\alpha} + C, \quad \text{gdy} \quad \alpha \neq -1 \\ \\ \ln|x| + C, \quad \text{gdy} \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) + C, \quad k > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{k + x^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{k}} + C, \quad k > 0$$

Dwa bardzo użyteczne wzory

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Twierdzenie 56. *(o całkowaniu przez części)*
Jeżeli funkcje f i g posiadają ciągłe pochodne w pewnym przedziale I, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 57. *(o całkowaniu przez podstawienie)*
Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Jeśli funkcja $x = \varphi(t)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha, \beta]$ i zbiór jej wartości zawarty jest w przedziale $[a,b]$, to zachodzi wzór

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Twierdzenie 58. *Każdą funkcję wymierną niewłaściwą $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} .$$

Wielomian $R(x)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez wielomian $Q(x)$.
Definicja 64. *Ułamki proste, to funkcje wymierne postaci*

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad oraz \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^m} ,$$

gdzie $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$, $k, m \in \mathbb{N}$, a przy tym wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$ trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c jest ujemny (mówiąc prościej, trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych).
Twierdzenie 59. *Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić w postaci skończonej sumy ułamków prostych.*
Uwaga 16. *Liczba i postać ułamków prostych w rozkładzie danej funkcji wymiernej zależą od wielomianu występującego w mianowniku. Aby rozłożyć funkcję wymierną na ułamki proste najpierw rozkładamy mianownik na czynniki postaci*

$$(x-a)^k \quad oraz \quad (ax^2+bx+c)^m \quad k, m \in \mathbb{N}$$

(w tym drugim przypadku musi zachodzić $b^2-4ac < 0$). Następnie tworzymy sumę ułamków prostych wg schematu

1. *każdemu czynnikowi $(x-a)^k$ odpowiada k ułamków prostych postaci*

$$\frac{A_1}{(x-a)}, \quad \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k} ,$$

2. *każdemu czynnikowi $(ax^2+bx+c)^m$ odpowiada m ułamków prostych postaci $\dfrac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}, \dfrac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}$*

Całkowanie ułamków prostych I rodzaju

Ułamki proste pierwszego rodzaju, czyli funkcje postaci $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ *całkujemy przez podstawienie* $x-a=t$*, wówczas* $dx=dt$.

Obliczanie całek typu $\displaystyle\int \frac{A}{ax^2+c}dx, \quad ac>0$

Stosujemy wzór

$$\int \frac{1}{x^2+k}dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{k}} + C, \qquad k>0,$$

Obliczanie całek typu $\displaystyle\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx, \quad b^2-4ac<0$

W tym przypadku należy

1. *zapisać mianownik w postaci kanonicznej* $a(x-p)^2+q$,
2. *wyłączyć stałą* $\dfrac{1}{a}$ *przed całkę (gdy* $a=1$ *pomijamy ten punkt),*
3. *podstawić* $x-p=t$.

Całkowanie funkcji typu $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\ , \quad b^2-4ac<0.$

Funkcję typu $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ $\quad (b^2-4ac<0)$ *zapisujemy w postaci*

$$\frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c} = \alpha\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \beta\cdot\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Wówczas

$$\int \frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c}dx = \alpha\cdot\underbrace{\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{I_1} + \beta\cdot\underbrace{\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$$

Całkę I_1 *obliczamy korzystając ze wzoru* $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$*, a całkę* I_2 *jak całkę typu* $\displaystyle\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx$.

Całkowanie funkcji typu $\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Funkcje typu $\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *całkujemy korzystając ze wzorów*

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C \tag{4}$$

lub

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + C, \quad k > 0. \tag{5}$$

Postępujemy według następującego schematu:

1. *zapisujemy funkcję* ax^2+bx+c *w postaci kanonicznej* $a(x-p)^2+q$,
2. *podstawiamy* $x-p=t$,
3. *otrzymaną funkcję całkujemy stosując wzór (**??**), gdy* $a>0$ *lub wzór (**??**), gdy* $a<0$.

Całkowanie funkcji typu $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Funkcję typu $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ *zapisujemy w postaci*

$$\frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \alpha\cdot\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \beta\cdot\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Wówczas

$$\int \frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \alpha\cdot\underbrace{\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}_{I_1} + \beta\cdot\underbrace{\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}_{I_2}$$

Całkę I_1 *obliczamy korzystając ze wzoru* $\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)}+C$, *a całkę* I_2 *ze wzoru (**??**) lub (**??**).*

CAŁKA OZNACZONA

Definicja 65. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną i ograniczoną na przedziale $[a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na n podprzedziałów punktami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takimi, że*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Oznaczmy długość każdego z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ przez Δx_i

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Największą długość Δx_i przedziału będziemy oznaczać przez λ i nazywać średnicą podziału odcinka $[a,b]$. W każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ wybieramy dowolny punkt $\overline{x}_i$ zwany punktem pośrednim. Następnie obliczamy wartość $f(\overline{x}_i)$ funkcji $f(x)$ w każdym z punktów $\overline{x}_i$ oraz tworzymy sumę

$$\boxed{S_n = f(\overline{x}_1) \cdot \Delta x_1 + f(\overline{x}_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots f(\overline{x}_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i.}$$

zwaną n-tą sumą częściową. Jeżeli istnieje skończona granica ciągu (S_n), gdy ilość podprzedziałów n dąży do nieskończoności i $\lambda \to 0$, a przy tym granica ta nie zależy od sposobu podziału odcinka $[a,b]$ punktami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i wyboru punktów pośrednich $\overline{x}_i$,
to granicę tę nazywamy całką oznaczoną Riemanna (matematyk niemiecki, (1826-1866)) funkcji $f(x)$ w przedziale $[a,b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Liczby a i b nazywamy, odpowiednio, dolną i górną granicą całkowania.
Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, a przedział $[a,b]$ przedziałem całkowania.

Definicja 66. *Funkcję $f(x)$ nazywamy* ***całkowalną w sensie Riemanna*** *w przedziale $[a,b]$, gdy istnieje jej całka oznaczona w przedziale $[a,b]$.*

Uwaga 17. *Dodatkowo, jeżeli $b < a$, to przyjmujemy*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

oraz

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Twierdzenie 60. *Każda funkcja ciągła w przedziale $[a,b]$ jest w tym przedziale całkowalna.*

Twierdzenie 61. *Każda funkcja ograniczona w przedziale $[a, b]$ i mająca w nim tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości jest w tym przedziale całkowalna.*
Twierdzenie 62. *Każda funkcja monotoniczna i ograniczona w przedziale $[a, b]$ jest w tym przedziale całkowalna.*
Twierdzenie 63. *(o liniowości całki oznaczonej) Jeżeli funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ są całkowalne w przedziale $[a, b]$, $(a < b)$ oraz $k \in \mathbb{R}$, to prawdziwe są równości*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 64. *(o addytywności całki względem przedziału całkowania)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a, b]$ oraz w przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$ dla dowolnego $c \in (a, b)$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 65. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a, b]$, $(a < b)$ i nieujemna w tym przedziale, to*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Twierdzenie 66. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a, b]$, $(a < b)$ i dodatnia w tym przedziale, to*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

.Całka oznaczona – własności Twierdzenie Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $[a, b]$, $\quad (a < b)$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi nierówność $f(x) \leqslant g(x)$, to

$$\int_a^b f(x) \leqslant \int_a^b g(x).$$

Twierdzenie 67. *(o wartości średniej dla całki oznaczonej)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, $(a<b)$ i w całym przedziale zachodzi równość $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to istnieje liczba $m < m_0 < M$ taka, że

$$\int_a^b f(x) = m_0(b-a).$$

Wniosek 2. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$, $a<b$ i w całym przedziale zachodzi równość $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Co więcej, istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Twierdzenie 68. *(Newtona-Leibniza)*
Jeżeli funkcja F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Uwaga 18. *Liczbę $F(b)-F(a)$ zapisujemy krócej $F(x)|_a^b$.*
Przy obliczaniu całek oznaczonych stosujemy więc zapis

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie 69. *(o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej)*
Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ posiadają ciągłe pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$ w przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 70. *(o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej)*
Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Jeśli funkcja $x=\varphi(t)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha,\beta]$ przy czym $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ i zbiór jej wartości zawarty jest w przedziale $[a,b]$, to zachodzi wzór

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Twierdzenie 71. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta i całkowalna na przedziale $[-a,a]$, to*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Twierdzenie 72. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta i całkowalna na przedziale $[-a,a]$, to*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Rozważmy funkcję $f(x)$ ciągłą na przedziale domkniętym $[a,b]$ i przyjmującą wartości nieujemne na tym przedziale. Pole obszaru D (zwanego trapezem krzywoliniowym) ograniczonego prostymi $x=a$, $x=b$, $y=0$ (osią Ox) i krzywą $y=f(x)$ jest liczbowo równe całce oznaczonej

$$|D| = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$ przyjmuje w tym przedziale wartości niedodatnie, to pole obszaru D ograniczonego prostymi $x=a$, $x=b$, $y=0$ (osią Ox) i krzywą $y=f(x)$ jest równe

$$|D| = -\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Definicja 67. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a,\infty)$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]\subset[a,\infty)$,$(b>a)$.*
Jeśli istnieje granica

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana I rodzaju funkcji f na przedziale $[a,\infty)$ i oznaczamy symbolem $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.
Zatem

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

W przypadku, gdy granica $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ istnieje mówmy, że całka jest zbieżna, a funkcję $f(x)$ nazywamy całkowalną w przedziale nieskończonym $[a,\infty)$.
Gdy granica nie istnieje lub jest niewłaściwa, mówimy, że całka jest rozbieżna.

Definicja 68. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(-\infty,b]$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]\subset(-\infty,b]$, $(b>a)$.*
Jeśli istnieje granica

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana I rodzaju funkcji f na przedziale $(-\infty,b]$ i oznaczamy symbolem $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.
Zatem

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Definicja 69. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(-\infty,\infty)$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]$, $(b>a)$.*
Całkę niewłaściwą funkcji $f(x)$ na przedziale $(-\infty,\infty)$ definiujemy za pomocą równości

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx+\int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$, zakładając, że obie całki po prawej stronie równości istnieją.

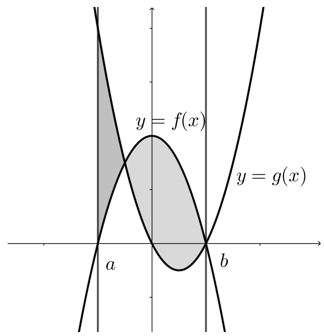
Uwaga 19. *Powyższa definicja nie zależy od wyboru $a\in\mathbb{R}$.*

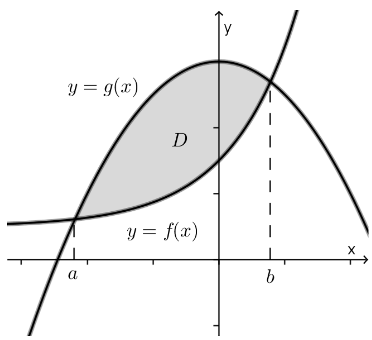
ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

Twierdzenie 73. *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$, to pole obszaru D ograniczonego liniami $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ oraz $x = b$ określone jest wzorem*

$$|D| = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx.$$

W szczególności, gdy $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$, to pole obszaru D jest równe

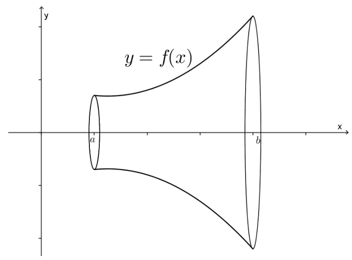




$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Twierdzenie 74. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to długość łuku krzywej $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ określona jest wzorem*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$



Twierdzenie 75. *Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi Ox krzywej $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ jest równa*

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Twierdzenie 76. *Pole $|S|$ powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu wokół osi Ox krzywej $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ jest równe*

$$|S| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$