Tydzień zajęć	Tematyka wykładu	Tematyka ćwiczeń
1.	Struktury algebraiczne (grupa, ciało; bez pierścienia).	Działania na macierzach.
2.	Definicja macierzy. Działania na macierzach. Wyznacznik i jego własności. Obliczanie wyznaczników.	Obliczanie wyznaczników.
3.	Macierz odwrotna. Układy równań liniowych. Twierdzenie Cramera.	Wyznaczanie A^{-1}. Równania macierzowe.
4.	Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera-Capelli (w bardzo ograniczonym zakresie).	Rozwiązywanie układów równań metodą Cramera oraz metodą Gaussa.
5.	Operacje elementarne. Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji Gaussa.	C.d. metody Gaussa.
6.	Geometria w R^3.	Geometria w R^3.
7.	Geometria w R^3.	Geometria w R^3.
8.	Geometria w R^3.	Geometria w R^3.
9.	Liczby zespolone.	Kolokwium nr 1.
10.	Liczby zespolone.	Liczby zespolone.
11.	Przestrzenie liniowe.	Liczby zespolone.
12.	Przestrzenie liniowe.	Liczby zespolone.
13.	Przekształcenia liniowe	Przekształcenia liniowe.
14.	Przekształcenia liniowe	Przekształcenia liniowe.
15.	Tw. Cayley'a-Hamiltona	Kolokwium nr 2.

Uwaga:

Tematy zaznaczone **kolorem niebieskim** będą realizowane tylko na wykładzie.

Macierze i wyznaczniki (3 godziny)

Działania na macierzach. Obliczanie wyznaczników – z definicji, za pomocą tw. Laplace'a, sprowadzając do postaci trójkątnej (wykorzystanie własności wyznaczników).

Przykładowy zestaw zadań:

1. Mając dane macierze $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 12\\ 3 & 2 & 9\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 2 & 5 & 7\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}$ i $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\\ 9 & 1\end{bmatrix}$

   oblicz:

   a) $(2\mathbf{A}-3\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{D}$, b) $\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^T\right)^T-2\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}$.

2. Korzystając z definicji oblicz wyznaczniki a) $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}$.

3. Stosując metodę Sarrusa oblicz wyznaczniki:

   a) $\begin{vmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & -4 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -9 & 6\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}2-i & i & 3\\ -2i & 1-i & 2+3i\\ 1-i & 4 & 6+5i\end{vmatrix}$

4. Stosując twierdzenie Laplace'a oblicz wyznaczniki:

   a) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$.

5. Stosując własności wyznaczników obliczyć:

   a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 3 & 5 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 4\\ 5 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1 & 3\\ -1 & -1 & 4 & 3\\ -3 & 0 & -8 & -13\end{vmatrix}$.

6. Oblicz wyznaczniki sprowadzając je do postaci trójkątnej:

   a) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 2\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$.

7. Wyznacz macierz odwrotną do danej: a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 4 & -5\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\\ 8 & 9 & 7\end{bmatrix}$.

8. Rozwiąż równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ -3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{X}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\\ 5 & 1 & 7\end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\mathbf{X}+\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -3 & 0 & 5\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -1 & -2\\ 0 & -7 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$

Układy równań (2 godziny)

Zastosowanie twierdzenia Cramera oraz metody Gaussa do rozwiązywania układów równań.

Przykładowy zestaw zadań:

1. Stosując twierdzenie Cramera rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases}x+y+z=3\\ 2x+5y+3z=1\\ 3x+2y+2z=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y+z=2\\ 3x+3y+2z=6\\ 2x-4y+z=9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x-y-3z=0\\ x-y+z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$

2. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases}2x+y+z=1\\ x+y+z=2\\ x+y-2z=-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y+2z=2\\ 3x+4y+6z=4\\ 2x+y+4z=1\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+y-3z-2u=4\\ x-2y-2z-3u=2\\ x+3y-z+u=1\end{cases}$

d) $\begin{cases}x-3y=5\\ 2x+y=0\\ 3x-y=-1\end{cases}$ e) $\begin{cases}x-2y+3z=5\\ 3x+y-z=1\end{cases}$

Geometria analityczna (3 godziny)

Wektory i działania na wektorach. Warunek równoległości wektorów. Iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany. Zastosowanie iloczynów do badania prostopadłości wektorów, obliczania pola trójkąta oraz obliczania objętości czworościany i równoległościanu. Równanie płaszczyzny i równania prostej – wyznaczanie.

Przykładowy zestaw zadań:

1. Wyznaczyć współrzędne wektora $\mathbf{X}=\overrightarrow{AB}$ w przestrzeni R^3, wiedząc, że $A(3,-1,0)$, zaś $B(1,-2,5)$, a następnie oblicz jego długość i kosinusy kierunkowe.
2. Obliczyć kosinus kąta pomiędzy wektorami: $\mathbf{X}=[2,-1,0]$, $\mathbf{Y}=[-3,0,1]$.

3. Dane są wektory $\mathbf{X}=[2,-1,0]$, $\mathbf{Y}=[-3,0,1]$. Oblicz:

a) $2\mathbf{X}-3\mathbf{Y}$, b) $(-\mathbf{Y}+4\mathbf{X})\cdot(\mathbf{Y}+\mathbf{X})$, c) $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$.

4. Korzystając z własności działań na wektorach i znajomości iloczynów wektorowych wersorów osi oblicz iloczyn wektorowy

$[2,1,4]^T \times [3,2,-2]^T$

5. Sprawdź czy wektory są $\mathbf{X}=[1,-2,1]^T$ oraz $\mathbf{Y}=[-4,8,4]^T$ równoległe.

6. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty

$A(1,2,3)$, $B(-3,2,1)$, $C(3,2,1)$.

7. Obliczyć objętość czworościanu ABCD, gdy:

A(1,-1,1), B(0,2,3), C(12,6,-1), D(2,3,4),

8. Obliczyć objętość równoległościanu wyznaczonego przez wektory

$\mathbf{X}=[2,1,3]^T, \mathbf{Y}=[1,-2,1]^T, \mathbf{Z}=[3,-1,4]^T$

9. Znaleźć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0(3,2,1)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{n}=[4,-2,3]^T$.

10. .Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy dane punkty: $P_1(2,-1,1), P_2(1,-3,2), P_3(1,0,4)$.

11. Znaleźć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0(2,-1,3)$, do której równoległe są wektory $\mathbf{u}=[1,-2,1]^T$ i $\mathbf{v}=[3,0,2]^T$.

12. Napisać równanie odcinkowe płaszczyzny $2x+y+3z-5=0$, a następnie naszkicować ją w prostokątnym układzie współrzędnych.

13. Napisać równania

a) parametryczne, b) kierunkowe,

prostej przechodzącej przez punkty $A(3,-2,0), B(1,1,-3)$.

14. Wyznaczyć wektory kierunkowe prostych:

a) $\begin{cases} 2x-y+3z-6=0 \\ x+7y-5z+11=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x+3y-2z+4=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$

15. Zbadać, czy układ równań $\begin{cases} 2x+3y-z+7=0 \\ x-2y+4z-3=0 \end{cases}$ przedstawia prostą. Jeżeli tak - zapisać ją równaniami parametrycznymi.

(*) Zadania dotyczące płaszczyzny i prostej oraz ich wzajemnego położenia.

Przykładowy zestaw zadań:

1. **(*)** Zbadać jak płaszczyzna $\pi: 2x+4y-6z+5=0$ położona jest względem płaszczyzn:

$\pi_1: 3x-y+2z-11=0$, $\pi_2: 3x+6y-9z+7{,}5=0$, $\pi_3: 4x+8y-12z+11=0$.

16. **(*)** Niekorzystając ze wzoru wyznaczyć odległość punktu $P(3,-3,2)$ od płaszczyzny $\pi: x+2y-2z+3=0$.

17. **(*)** Wyznaczyć odległość punktu $P(2,3,-1)$ od prostej $l: \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+2t \\ z=1+t \end{cases} \quad t \in R$.

18. **(*)** Zbadać jak prosta k jest położona względem prostych l_i, $i=1,2,3$.

$$k: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases} \quad l_1: \begin{cases} x=2s \\ y=3-6s \\ z=-1+4s \end{cases} \quad l_2: \begin{cases} x=-1+3s \\ y=8-9s \\ z=3+6s \end{cases} \quad l_3: \begin{cases} x=2+2s \\ y=3+s \\ z=1+s \end{cases}$$

19. **(*)** Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $M(2,-2,1)$ i prostą $l: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=-2-t \end{cases}$

20. **(*)** Znaleźć tę płaszczyznę, należącą do pęku płaszczyzn o krawędzi $l: \begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ x-3y-2z+4=0 \end{cases}$, która jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: 3x+4y-5z+11=0$.

Kolokwium nr 1.

Liczby zespolone (3 godziny)

Liczby zespolone i działania na nich w postaci kartezjańskiej. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych. Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej. Pierwiastkowanie liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry w zbiorze liczb zespolonych i jego zastosowanie do rozwiązywania równań wielomianowych.

Przykładowy zestaw zadań:

1. Wykonaj działania i wynik przedstaw w postaci kartezjańskiej

a) $(1+4i)+(5+2i)=$ b) $(1+4i)-(5+2i)=$

c) $(3-5i)(2+i)=$ d) $\frac{3+2i}{1+i}=$

e) $(1-2i)^2 i^{17}=$ f) $\frac{i^3(2+3i)^2}{(1+2i)^2}=$

2. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej podane liczby, a następnie przedstaw je w postaci trygonometrycznej:

   a) $z_1=2i$, b) $z_2=-3$, c) $z_3=-2\sqrt{3}+2i$, d) $z_4=2-2i$,

3. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby $z=\sqrt{3}+i$, $w=-1-i$, $u=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a następnie wykonaj działania:

   a) $z\cdot w$, b) $\frac{w}{z}$, c) $\frac{z^{10}}{u^2\cdot w^5}$, d) w^{2006}.

4. Oblicz:

   a) $\sqrt{3+4i}$, b) $\sqrt[3]{8}$, c) $\sqrt[4]{i}$, d) $\sqrt[3]{-3-3i}$

5. Rozwiąż równania

   a) $z^2-6z+10=0$,

   b) $z^2-(5+2i)z+(7+11i)=0$,

   c) $(z^2+z-6)(z^2+2z+5)=0$,

   d) $(z^3-i)[z^2-(4-i)z+(5+i)]=0$

6. **(*)** Rozwiązać równanie $x^4-2x^3+11x^2-18x+18=0$ wiedząc, że liczba $x_1=1-i$ jest jednym z jego pierwiastków.

7. **(*)** Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniające zależności:

   a) $|z|\le 2$, b) $\mathrm{Re}(z+1-2i)<0$ c) $\mathrm{Im}\frac{z-2}{z+2}=0$, d) $|z-1|=3$.

Przekształcenia liniowe (2 godziny)

Wyznaczanie macierzy przekształcenia, wartości i wektorów własnych.

Przykładowy zestaw zadań

1. Sprawdź, czy przekształcenie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(x_1,x_2,x_3)=(x_2-2x_1,3x_1+x_2)$ jest przekształceniem liniowym.
2. Dla przekształcenia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ w siebie danego wzorem $f(x_1,x_2)=(x_1-5x_2,x_1-x_2)$ wyznacz jego macierz, wartości własne oraz wektor własny odpowiadający jednej z wartości własnych (dowolnie wybranej).
3. Dla przekształcenia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ w siebie danego wzorem $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_3,x_1-x_2+3x_3,3x_1+x_2)$ wyznacz jego macierz, wartości

własne oraz wektor własny odpowiadający jednej z wartości własnych (dowolnie wybranej).

4. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pewnego przekształcenia liniowego $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wyznacz jego wartości własne oraz wektor własny odpowiadający jednej z wartości własnych (dowolnie wybranej).

Kolokwium nr 2.