ANALIZA MATEMATYCZNA 1

Ciągi liczbowe

Definicja 1. *Rzeczywistym nieskończonym ciągiem liczbowym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych*

$$f \ : \ \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \mapsto a_n \ .$$

Ciąg oznaczamy krócej symbolem (a_n) *lub* $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$.
Ciągi, których wyrazy są funkcjami nazywamy ciągami funkcyjnymi.

Definicja 2. *Ciąg liczbowy* (a_n) *nazywamy:*
stałym*, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} = a_n$,

rosnącym*, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} > a_n$,

malejącym*, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} < a_n$,

nierosnącym*, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \leqslant a_n$,

niemalejacym*, jeżeli* $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \geqslant a_n$.

Definicja 3. *Ciąg liczbowy* (a_n) *nazywamy:*
ograniczonym z dołu*, jeżeli*

$$\bigvee_{m\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \geqslant m \ ,$$

ograniczonym z góry*, jeżeli*

$$\bigvee_{M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant M,$$

ograniczonym*, jeżeli*

$$\bigvee_{m,M\in\mathbb{R}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M.$$

Definicja 4. *Ciąg* a_n *ma granicę właściwą* g*, jeżeli w każdym otoczeniu* $(g-\epsilon, g+\epsilon)$ *liczby* g*, gdzie* $\epsilon > 0$*, leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu, tzn. wszystkie począwszy od pewnego wskaźnika* N_0.

Fakt, że ciąg (a_n) ma granicę g zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ lub $a_n \longrightarrow g$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{N_0\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>N_0} |a_n - g| < \epsilon.$$

Ciąg, który ma granicę właściwą nazywamy zbieżnym.
Twierdzenie 1. *Ciąg ma co najwyżej jedna granicę.*
Twierdzenie 2. *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*
Uwaga 1. *Jeżeli ciąg jest ograniczony, to nie musi być zbieżny!*
Twierdzenie 3. *Jeżeli ciąg jest ograniczony i monotoniczny, to jest zbieżny.*
Definicja 5.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \left(\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>K} a_n > M \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \left(\bigwedge_{M\in\mathbb{R}} \bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n>K} a_n < M \right)$$

Twierdzenie 4. *(o trzech ciągach)*
Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

oraz

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \ ,$$

to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Twierdzenie 5. *Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) mają granice właściwe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ oraz $k \in \mathbb{R}$, to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot A$,

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{A}{B}$, *gdy* $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n\neq 0$ *oraz* $B\neq 0$.

Twierdzenie 6. *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest zbieżny do zera i ciąg* (b_n) *jest ograniczony, to ciąg i* $(a_n\cdot b_n)$ *jest zbieżny do zera.*

Twierdzenie 7. *Prawdziwe są wzory:*

1. $$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}\text{nie istnieje dla} \quad q\leqslant -1,\\ 0 \quad \text{dla} \quad q\in(-1,1)\\ 1 \quad \text{dla} \quad q=1,\\ +\infty \quad \text{dla} \quad q>1.\end{cases},$$

2. $$\lim_{n\to\infty} n^\alpha=\begin{cases}0 \quad \text{dla} \quad \alpha<0\\ 1 \quad \text{dla} \quad \alpha=0,\\ +\infty \quad \text{dla} \quad \alpha>0.\end{cases},$$

Twierdzenie 8. *Prawdziwe są wzory:*

1. $\bigwedge\limits_{a>0}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1, \quad k>0$,

3. $\left(\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n\geqslant 0 \ \wedge \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n>0\right) \ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

Twierdzenie 9. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n=A$ *oraz* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n=\pm\infty$, *to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\pm\infty$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\pm\infty, \quad A\neq 0$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0, \quad$ *gdy* $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n\neq 0$.

Twierdzenie 10. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n=+\infty$ *oraz* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n=+\infty$, *to*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=+\infty$,

Twierdzenie 11. *Jeżeli* $\bigvee_{K\in\mathbb{N}} \bigwedge_{N>K} a_n > 0$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Symbole nieoznaczone

$$\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty-\infty, 0\cdot\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty}$$

Definicja 6.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\ .$$

Twierdzenie 12. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, *to*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}\ .$$

Uwaga 2. *Logarytm, którego podstawą jest liczba e nazywamy* ***logarytmem naturalnym*** *i oznaczamy symbolem* ln, *np.*

$$\log_e 7 = \ln 7.$$

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

Definicja 7. *Otoczeniem o promieniu $\epsilon > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$U(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Definicja 8. *Sąsiedztwem o promieniu $\epsilon > 0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy otoczenie o promieniu ϵ punktu x_0 pozbawione punktu x_0, czyli zbiór*

$$S(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; 0 < |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Definicja 9. *Otoczeniem nieskończoności nazywamy zbiór*

$$U(\infty) = (a, \infty) \quad \textit{dla dowolnego } a \in \mathbb{R}.$$

Definicja 10. *Otoczeniem minus nieskończoności nazywamy zbiór*

$$U(-\infty) = (-\infty, a) \quad \textit{dla dowolnego } a \in \mathbb{R}.$$

Definicja 11. *Sąsiedztwem prawostronnym (lewostronnym) o promieniu ϵ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór*

$$S(x_0^+, \epsilon) = (x_0, x_0 + \epsilon) \quad \Big(S(x_0^-, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0)\Big).$$

Definicja 12. *(Heine)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to x_0,\ x_n \in S(x_0)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 13. *(równoważna, Cauchy)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x} \left[(0 < |x - x_0| < \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \epsilon\right]$$

Definicja 14. *(granicy niewłaściwej)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to x_0,\ x_n \in S(x_0)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \pm\infty$$

Definicja 15. *(granicy w punkcie niewłaściwym)*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to \infty,\ x_n \in S(\infty)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 16. *(granicy w punkcie niewłaściwym)*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{(x_n) \to -\infty,\ x_n \in S(-\infty)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Definicja 17. *(granicy lewostronnej)*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \iff \bigwedge_{(x_n) \to x_0,\ x_n \in S(x_0^-)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Definicja 18. *(granicy prawostronnej)*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \iff \bigwedge_{(x_n) \to x_0,\ x_n \in S(x_0^+)} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g.$$

Definicja 19. *Niech funkcja f będzie określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0. Prostą $x = x_0$ nazywamy*

- ***asymptotą lewowostronną*** *funkcji f, jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$*
- ***asymptotą prawostronną*** *funkcji f, jeżeli $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$*

Definicja 20. *Prostą $y = ax + b$ nazywamy* ***asymptotą ukośną w minus nieskończoności*** *funkcji $f(x)$, jeżeli*

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Definicja 21. *Prostą $y = ax + b$ nazywamy* ***asymptotą ukośną w plus nieskończoności*** *funkcji $f(x)$, jeżeli*

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Twierdzenie 13.

Definicja 22. ***Punktem izolowanym*** *zbioru D nazywamy każdy punkt $x_0 \in D$, dla którego istnieje sąsiedztwo $S(x_0$ rozłączne ze zbiorem D.*

Definicja 23. *Funkcję $f : X \to Y$ określoną w pewnym otoczeniu punktu x_0 nazywamy* ***ciągłą w punkcie*** *x_0, jeżeli ma w tym punkcie granicę równa swojej wartości w tym punkcie, tzn. jeżeli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$$

lub, gdy punkt x_0 jest punktem izolowanym dziedziny funkcji f.

Definicja 24. *Jeżeli*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0),$$

to funkcję f nazywamy ***lewostronnie ciągłą w punkcie*** *x_0,*
a jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

to funkcję f nazywamy ***prawostronnie ciągłą w punkcie*** *x_0.*

Definicja 25. *(nieciągłości I rodzaju)*
Mówimy, że punkt x_0 jest ***punktem nieciągłości I rodzaju*** *funkcji f, jeżeli funkcja nie jest ciągła w tym punkcie oraz granice lewo- i prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 są skończone.*
Definicja 26. *(nieciągłości II rodzaju)*
Mówimy, że punkt x_0 jest ***punktem nieciągłości II rodzaju*** *funkcji f, jeżeli funkcja nie jest ciągła w tym punkcie oraz jedna z granic lewo- lub prawostronna tej funkcji w punkcie x_0 jest nieskończona lub nie istnieje.*
Twierdzenie 14. *Jeżeli dwie funkcje f i g są określone na pewnym otoczeniu punktu x_0 i obie są ciągłe w punkcie x_0 oraz $a \in \mathbb{R}$, to w tym punkcie są ciągłe także funkcje*

$$a \cdot f, \quad f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

przy czym ta ostatnia przy założeniu, że $g(x) \neq 0$.
Twierdzenie 15. *(o ciągłości funkcji złożonej)*
Jeżeli funkcja $f(g)$ jest złożeniem funkcji $g : X \to Y$ oraz $f : Y \to Z$, a ponadto funkcja g jest ciągła w punkcie x_0, a funkcja f jest ciągła w punkcie $g(x_0)$, to funkcja $f(g(x))$ jest ciągła w punkcie x_0.
Definicja 27. *Funkcję nazywamy ciągłą w zbiorze $A \subset X$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.*
Definicja 28. *Funkcję nazywamy ciągłą w przedziale domkniętym $[a, b]$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru oraz jest prawostronnie ciągła w punkcie a
i lewostronnie ciągła w punkcie b.*
Definicja 29. *Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcję tożsamościową $x \mapsto x$, funkcje wykładnicze, funkcje trygonometryczne oraz wszystkie funkcje, które można z nich otrzymać za pomocą ograniczania dziedziny (obcinania), dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia, składania i odwracania funkcji.*
Twierdzenie 16. *Funkcje elementarne są ciągłe.*
W szczególności ciągłe są wielomiany, funkcje wymierne, funkcje wykładnicze, funkcje logarytmiczne, funkcje trygonometryczne, funkcje hiperboliczne, funkcje cyklometryczne.
Twierdzenie 17. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w tym przedziale swoja wartość najmniejszą i największą (w szczególności jest ograniczona).*
Twierdzenie 18. *(o lokalnym zachowaniu znaku)*
Jeżeli funkcja w pewnym punkcie jest ciągła i dodatnia (ujemna), to jest również dodatnia (ujemna) w pewnym otoczeniu tego punktu.
Twierdzenie 19. *(własność Darboux)*
Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje w tym przedziale każdą wartość pośrednią między wartościami na końcach przedziału. Innymi słowy,

$$(f(a) = A \wedge f(b) = B) \quad \Rightarrow \quad \bigwedge_{M \in (A,B)} \bigvee_{c \in (a,b)} f(c) = M.$$

Twierdzenie 20. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz jej wartości na krańcach tego przedziału $f(a)$ i $f(b)$ są różnych znaków, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$ (co najmniej jeden), że $f(c) = 0$.*

Pochodna funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

Definicja 30. *Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na przedziale (a, b) i niech x_0 oraz x będą dwoma różnymi punktami tego przedziału. Wyrażenie*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy ***ilorazem różnicowym*** *odpowiadającym przyrostowi argumentu $x - x_0$.*

Definicja 31. *Jeżeli istnieje granica ilorazu różnicowego $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, gdy $x \to x_0$, to granicę tę nazywamy* ***pochodną funkcji*** *f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$, tzn.*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jeśli granica ta nie istnieje mówimy, ze funkcja f nie posiada pochodnej w punkcie x_0.

Definicja 32. *O funkcji posiadającej pochodną w punkcie x mówimy, że jest* ***różniczkowalna*** *w tym punkcie.*

Definicja 33. *Jeżeli funkcja f ma pochodną w każdym punkcie zbioru X, to funkcję $x \mapsto f'(x)$ nazywamy* ***funkcją pochodną*** *(krótko, pochodną) funkcji f w zbiorze X i oznaczamy f'. Mówimy wówczas, że funkcja f jest różniczkowalna w zbiorze X.*

Twierdzenie 21. *Jeśli funkcja f posiada pochodną w punkcie x_0, to jest w tym punkcie ciągłą.*

Uwaga 3. *Z ciągłości funkcji f w punkcie x_0 nie wynika istnienie jej pochodnej w tym punkcie.*

Twierdzenie 22. *Jeżeli funkcje f i g określone na pewnym przedziale (a, b) posiadają pochodne*
w punkcie x oraz $k \in \mathbb{R}$, to funkcje $k \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ oraz $\dfrac{f}{g}$ posiadają pochodne w punkcie x oraz prawdziwe są wzory:

$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Pochodne funkcji elementarnych

$(a)' = 0,$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z},$

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$

$(ax + b)' = a,$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},$

$(\sin x)' = \cos x,$

$(\cos x)' = -\sin x,$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}\ ,$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\ ,$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\ ,$

$(e^x)' = e^x,$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}\ ,$

$(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}\ .$

Twierdzenie 23. *(o pochodnej funkcji złożonej) Jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x_0, a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $u_0 = g(x_0)$, to funkcja złożona $f \circ g = f(g)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz jej pochodna określona jest wzorem:*

$$[f(g(x_0))]' = f'(u_0) \cdot g'(x_0).$$

Twierdzenie 24. *(o pochodnej funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja f jest ciągła i sciśle monotoniczna na przedziale (a, b) oraz ma pochodną różną od zera w punkcie x_0 tego przedziału, to funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x_0)$ oraz jej pochodna określona jest wzorem:*

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Definicja 34. *Jeżeli pochodna f' funkcji f jest różniczkowalna w zbiorze X, to jej pochodną nazywamy* ***pochodną rzędu drugiego*** *funkcji f i oznaczamy symbolem f''.*

Uwaga 4. *Analogicznie (za pomocą indukcji matematycznej) określamy pochodne wyższych rzędów.*

Definicja 35. *Niech funkcja f będzie różniczkowalna w pewnym otoczeniu danego punktu x_0, zaś $\Delta x \neq 0$, niech oznacza dowolny przyrost argumentu x.* ***Różniczką*** *funkcji f w punkcie x_0 nazywamy wyrażenie*

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x.$$

Uwaga 5.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Twierdzenie 25. *(Rolle'a)*

Jeżeli

1. *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$,*
2. *funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b),*
3. *$f(a) = f(b)$,*

to istnieje (przynajmniej jeden) punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Twierdzenie 26. *(Lagrange'a)*
Jeżeli

1. *funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$,*
2. *funkcja f jest różniczkowalna w przedziale (a, b),*

to istnieje (przynajmniej jeden) punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Twierdzenie 27. *(Wnioski z twierdzenia Lagrange'a)*

1) *Jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest stała w przedziale (a, b),*

2) *jeżeli funkcje f i g mają równe pochodne w przedziale (a, b), to funkcje te różnią się w tym przedziale co najwyżej o stałą,*

3) *jeżeli $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w tym przedziale,*

4) *jeżeli $f'(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w tym przedziale,*

5) *jeżeli $f'(x) \geqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest niemalejąca w tym przedziale,*

6) *jeżeli $f'(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest nierosnąca w tym przedziale.*

Twierdzenie 28. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to jest ona rosnąca w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{x \in (a,b)} f'(x) \geqslant 0$$

i zbiór $\{x : f'(x) = 0\}$ nie zawiera przedziału.

Twierdzenie 29. *Jeżeli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b), to jest ona malejąca w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\bigwedge_{x \in (a,b)} f'(x) \leqslant 0$$

i zbiór $\{x : f'(x) = 0\}$ nie zawiera przedziału.

Twierdzenie 30. *(Wzór Taylora) Jeżeli funkcja f ma ciągłą pochodną rzędu n w przedziale $[a, b]$ i ciągłą pochodną rzędu $(n + 1)$ w przedziale (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Ostatni składnik

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

nazywamy resztą w postaci Lagrange'a.

Gdy przyjmiemy $a = 0$ oraz $b = x$, to wzór Taylora przyjmuje postać

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

i nosi nazwę wzoru **Maclaurina**.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \; + R_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_n(x), \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 \ldots \binom{\alpha}{n}x^n + R_n(x), \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = (1 + (-x))^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n(x) \quad \text{dla} \quad -1 < x < 1.$$

Definicja 36. *Załóżmy teraz, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo $S(x_0)$ punktu x_0 takie, że*

$$\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \left(\bigwedge_{x \in S(x_0)} f(x_0) \leqslant f(x)\right)$$

*Gdy nierówności są ostre, to mówimy o **maksimum (minimum) lokalnym właściwym**.*
Twierdzenie 31. *Fermata (warunek konieczny istnienia ekstremum)*
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i osiąga w tym punkcie ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.
Uwaga 6. *Warunek konieczny nie jest jednak warunkiem wystarczającym, gdyż np. funkcja $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 0$ ma pochodną równą zero, a nie ma ekstremum.*
Twierdzenie 32. *(I warunek wystarczający istnienia ekstremum)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0, \epsilon)$ punktu x_0 oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, to funkcja f osiąga w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe.
Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i różniczkowalna w sąsiedztwie $S(x_0, \epsilon)$ punktu x_0 oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$, to funkcja f osiąga w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe.

Twierdzenie 33. *(II warunek wystarczający istnienia ekstremum)*
Jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz

1. $f'(x_0) = 0$,
2. $f''(x_0) \neq 0$,
3. *pochodna drugiego rzędu x_0 jest ciągła w punkcie x_0,*

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne. Jest to maksimum, gdy $f''(x_0) < 0$, a minimum, gdy $f''(x_0) > 0$.
Twierdzenie 34. *(II warunek wystarczający istnienia ekstremum - uogólnienie)*
Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
2. $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
3. *pochodna rzędu n jest ciągła w punkcie x_0,*

to funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, gdy n jest liczbą parzystą. Jest to maksimum, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$, a minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$.
Gdy n jest liczbą nieparzystą, funkcja f nie osiąga ekstremum lokalnego w tym punkcie.
Definicja 37. *Niech zbiór A będzie podzbiorem dziedziny funkcji rzeczywistej f. Powiemy, że funkcja f osiąga* ***maksimum (minimum) absolutne*** *w punkcie $x_0 \in A$, jeżeli*

$$\bigwedge_{x\in A} f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \left(\bigwedge_{x\in A} f(x_0) \leqslant f(x)\right).$$

Definicja 38. *Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest* ***wypukła*** *w punkcie x_0, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$, że dla każdego $x \in S(x_0)$ punkty tej krzywej leżą powyżej stycznej poprowadzonej w punkcie x_0 .*
Definicja 39. *Mówimy, że krzywa $y = f(x)$ jest* ***wklęsła*** *w punkcie x_0, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0)$, że dla każdego $x \in S(x_0)$ punkty tej krzywej leżą poniżej stycznej poprowadzonej w punkcie x_0 .*
Twierdzenie 35. *(warunek wystarczający)*
Jeżeli pochodna drugiego rzędu funkcji f jest dodatnia (ujemna) w przedziale (a, b) , to krzywa $y = f(x)$ jest wypukła (wklęsła) w tym przedziale.
Definicja 40. *Punkt x_0 nazywamy* ***punktem przegięcia*** *krzywej f , jeśli istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, \epsilon)$ punktu x_0, że krzywa jest wypukła (wklęsła) dla $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ oraz wklęsła (wypukła) dla $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Inaczej punkt, w którym styczna przechodzi z nad krzywej pod nią, lub odwrotnie.*
Twierdzenie 36. *(warunek konieczny istnienia punktu przegięcia) Jeżeli krzywa f ma w punkcie x_0 punkt przegięcia i istnieje ciągła pochodna drugiego rzędu funkcji f w pewnym otoczeniu punktu x_0 , to $f''(x_0) = 0$.*

Uwaga 7. *Warunek konieczny nie jest warunkiem wystarczającym.*
Twierdzenie 37. *(I warunek wystarczający)*
Jeżeli funkcja f *jest różniczkowalna w otoczeniu* $U(x_0, \epsilon)$ *i dwukrotnie różniczkowalna w sąsiedztwie* $S(x_0, \epsilon)$ *oraz* $f''(x_0) > 0 \quad (f''(x_0) < 0)$ *dla* $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ *oraz* $f''(x_0) < 0 \quad (f''(x_0) > 0)$ *dla* $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ *, to punkt* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *jest punktem przegięcia krzywej* $y = f(x)$.
Twierdzenie 38. *(REGUŁA DE L'HOSPITALA) Jeżeli funkcje* f *i* g *są różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie* $S(x_0)$ *punktu* x_0*,* $g(x) \neq 0$ *dla* $S(x_0)$ *oraz*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

i istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub nie),*
to istnieje również granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *przy czym*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 8. *Twierdzenie odwrotne nie zachodzi.*

Uwaga 9. *Modyfikując odpowiednio założenia twierdzenie pozostaje prawdziwe dla symbolu* $\frac{\infty}{\infty}$ *oraz w przypadku granic jednostronnych przy* $x \to \infty$ *i* $x \to -\infty$.

Aby zastosować regułę de l'Hospitala do wyrażeń nieoznaczonych typu $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$ stosujemy odpowiednio tożsamości:

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{lub} \quad f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \cdot g(x).$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} - \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}.$$

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Definicja 41. *Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym przedziale I. Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy każdą funkcję F, która jest różniczkowalna w przedziale I oraz spełnia warunek*

$$\bigwedge_{x\in I} F'(x) = f(x).$$

Twierdzenie 39. *Jeżeli funkcja $F(x)$ jest w pewnym przedziale funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to każda funkcja postaci $F(x)+C$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą, jest również funkcją pierwotną funkcji $f(x)$. Co więcej, wszystkie funkcje pierwotne funkcji $f(x)$ mają tę postać, to znaczy różnią się co najwyżej o stałą.*

Definicja 42. *Wyrażenie $F(x)+C$, gdzie C jest dowolną stałą rzeczywistą nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ i oznaczamy symbolem*

$$\int f(x)dx.$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, a iloczyn $f(x)dx$ wyrażeniem podcałkowym.

Twierdzenie 40. *1. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada funkcję pierwotną na przedziale I, to*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad dla \quad x \in I.$$

2. Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada ciągłą pochodną na przedziale I, to

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad dla \quad x \in I.$$

Twierdzenie 41. *Każda funkcja ciągła na przedziale I, posiada funkcję pierwotną na tym przedziale.*

Twierdzenie 42. *(o liniowości całki nieoznaczonej Jeżeli funkcje f oraz g posiadają funkcje pierwotne na pewnym przedziale I oraz k jest dowolną liczbą rzeczywistą, to*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx.$$

(Sformułowanie równoważne) Jeżeli funkcje f oraz g posiadają funkcje pierwotne na pewnym przedziale I oraz $a,\ b$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$\int [a \cdot f(x) + b \cdot g(x)]dx = a \cdot \int f(x)dx + b \cdot \int g(x)dx.$$

Wzory podstawowe

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha} + C, & \text{gdy} \quad \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \text{gdy} \quad \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{k - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) + C, \quad k > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + k}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{k + x^2} = \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{k}} + C, \quad k > 0$$

Dwa bardzo użyteczne wzory

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

Twierdzenie 43. *(o całkowaniu przez części)*
Jeżeli funkcje f i g posiadają ciągłe pochodne w pewnym przedziale I, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 44. *(o całkowaniu przez podstawienie)*
Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Jeśli funkcja $x=\varphi(t)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha,\beta]$ i zbiór jej wartości zawarty jest w przedziale $[a,b]$, to zachodzi wzór

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Twierdzenie 45. *Każdą funkcję wymierną niewłaściwą $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ można przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\ .$$

Wielomian $R(x)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $P(x)$ przez wielomian $Q(x)$.
Definicja 43. *Ułamki proste, to funkcje wymierne postaci*

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad oraz \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^m}\ ,$$

gdzie $A,B,C,a,b,c\in\mathbb{R}$, $k,m\in\mathbb{N}$, a przy tym wyróżnik $\Delta=b^2-4ac$ trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c jest ujemny (mówiąc prościej, trójmian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych).
Twierdzenie 46. *Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić w postaci skończonej sumy ułamków prostych.*
Uwaga 10. *Liczba i postać ułamków prostych w rozkładzie danej funkcji wymiernej zależą od wielomianu występującego w mianowniku. Aby rozłożyć funkcję wymierną na ułamki proste najpierw rozkładamy mianownik na czynniki postaci*

$$(x-a)^k \quad oraz \quad (ax^2+bx+c)^m \quad k,m\in\mathbb{N}$$

(w tym drugim przypadku musi zachodzić $b^2-4ac<0$). Następnie tworzymy sumę ułamków prostych wg schematu

1. *każdemu czynnikowi $(x-a)^k$ odpowiada k ułamków prostych postaci*

$$\frac{A_1}{(x-a)},\quad \frac{A_2}{(x-a)^2},\dots,\frac{A_k}{(x-a)^k}\ ,$$

2. *każdemu czynnikowi $(ax^2+bx+c)^m$ odpowiada m ułamków prostych postaci* $\dfrac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}, \dfrac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}$

Całkowanie ułamków prostych I rodzaju

Ułamki proste pierwszego rodzaju, czyli funkcje postaci $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ całkujemy przez podstawienie $x-a=t$, wówczas $dx=dt$.

Obliczanie całek typu $\int \frac{A}{ax^2+c}dx, \quad ac>0$

Stosujemy wzór

$$\int \frac{1}{x^2+k}dx = \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{k}} + C, \qquad k>0,$$

Obliczanie całek typu $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx, \quad b^2-4ac<0$

W tym przypadku należy

1. zapisać mianownik w postaci kanonicznej $a(x-p)^2+q$,
2. wyłączyć stałą $\frac{1}{a}$ przed całkę (gdy $a=1$ pomijamy ten punkt),
3. podstawić $x-p=t$.

Całkowanie funkcji typu $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, $\quad b^2-4ac<0.$

Funkcję typu $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ $\quad (b^2-4ac<0)$ zapisujemy w postaci

$$\frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c} = \alpha\cdot\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \beta\cdot\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Wówczas

$$\int\frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c}dx = \alpha\cdot\underbrace{\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{I_1} + \beta\cdot\underbrace{\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$$

Całkę I_1 obliczamy korzystając ze wzoru $\int\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)|+C$, a całkę I_2 jak całkę typu $\int\frac{A}{ax^2+bx+c}dx$.

Całkowanie funkcji typu $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Funkcje typu $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ całkujemy korzystając ze wzorów

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C \tag{1}$$

lub

$$\int\frac{dx}{\sqrt{k-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{k}} + C, \quad k>0. \tag{2}$$

Postępujemy według następującego schematu:

1. zapisujemy funkcję $ax^2 + bx + c$ w postaci kanonicznej $a(x-p)^2 + q$,
2. podstawiamy $x - p = t$,
3. otrzymaną funkcję całkujemy stosując wzór (**??**), gdy $a > 0$
   lub wzór (**??**), gdy $a < 0$.

Całkowanie funkcji typu $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Funkcję typu $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \alpha \cdot \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Wówczas

$$\int \frac{\alpha(2ax+b)+\beta}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \alpha \cdot \underbrace{\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx}_{I_1} + \beta \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}}_{I_2}$$

Całkę I_1 obliczamy korzystając ze wzoru $\int \dfrac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$, a całkę I_2 ze wzoru (**??**) lub (**??**).

CAŁKA OZNACZONA

Definicja 44. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną i ograniczoną na przedziale $[a,b]$. Podzielmy przedział $[a,b]$ na n podprzedziałów punktami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takimi, że*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Oznaczmy długość każdego z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ przez Δx_i

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Największą długość Δx_i przedziału będziemy oznaczać przez λ i nazywać średnicą podziału odcinka $[a,b]$. W każdym z podprzedziałów $[x_{i-1}, x_i]$ wybieramy dowolny punkt $\overline{x}_i$ zwany punktem pośrednim. Następnie obliczamy wartość $f(\overline{x}_i)$ funkcji $f(x)$ w każdym z punktów $\overline{x}_i$ oraz tworzymy sumę

$$\boxed{S_n = f(\overline{x}_1) \cdot \Delta x_1 + f(\overline{x}_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots f(\overline{x}_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i.}$$

zwaną n-tą sumą częściową. Jeżeli istnieje skończona granica ciągu (S_n), gdy ilość podprzedziałów n dąży do nieskończoności i $\lambda \to 0$, a przy tym granica ta nie zależy od sposobu podziału odcinka $[a,b]$ punktami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i wyboru punktów pośrednich $\overline{x}_i$,
to granicę tę nazywamy całką oznaczoną Riemanna (matematyk niemiecki, (1826-1866)) funkcji $f(x)$ w przedziale $[a,b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Liczby a i b nazywamy, odpowiednio, dolną i górną granicą całkowania.
Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, a przedział $[a,b]$ przedziałem całkowania.

Definicja 45. *Funkcję $f(x)$ nazywamy* ***całkowalną w sensie Riemanna*** *w przedziale $[a,b]$, gdy istnieje jej całka oznaczona w przedziale $[a,b]$.*

Uwaga 11. *Dodatkowo, jeżeli $b < a$, to przyjmujemy*

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$$

oraz

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Twierdzenie 47. *Każda funkcja ciągła w przedziale $[a,b]$ jest w tym przedziale całkowalna.*

Twierdzenie 48. *Każda funkcja ograniczona w przedziale* $[a, b]$ *i mająca w nim tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości jest w tym przedziale całkowalna.*

Twierdzenie 49. *Każda funkcja monotoniczna i ograniczona w przedziale* $[a, b]$ *jest w tym przedziale całkowalna.*

Twierdzenie 50. *(o liniowości całki oznaczonej) Jeżeli funkcje* $f(x)$ *oraz* $g(x)$ *są całkowalne w przedziale* $[a, b]$, $(a < b)$ *oraz* $k \in \mathbb{R}$, *to prawdziwe są równości*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

$$\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 51. *(o addytywności całki względem przedziału całkowania) Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest całkowalna w przedziale* $[a, b]$ *oraz w przedziałach* $[a, c]$ *i* $[c, b]$ *dla dowolnego* $c \in (a, b)$, *to*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 52. *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest całkowalna w przedziale* $[a, b]$, $(a < b)$ *i nieujemna w tym przedziale, to*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

Twierdzenie 53. *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest całkowalna w przedziale* $[a, b]$, $(a < b)$ *i dodatnia w tym przedziale, to*

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

.Całka oznaczona – własności Twierdzenie Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne w przedziale $[a, b]$, $\quad (a < b)$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi nierówność $f(x) \leqslant g(x)$, to

$$\int_a^b f(x) \leqslant \int_a^b g(x).$$

Twierdzenie 54. *(o wartości średniej dla całki oznaczonej)*
Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, $(a < b)$ i w całym przedziale zachodzi równość $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to istnieje liczba $m < m_0 < M$ taka, że

$$\int\limits_a^b f(x) = m_0(b-a).$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$, $a < b$ i w całym przedziale zachodzi równość $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Co więcej, istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Twierdzenie 55. *(Newtona-Leibniza)*
Jeżeli funkcja F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f ciągłej na przedziale $[a,b]$, to

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Uwaga 12. *Liczbę $F(b) - F(a)$ zapisujemy krócej $F(x)|_a^b$.*
Przy obliczaniu całek oznaczonych stosujemy więc zapis

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Twierdzenie 56. *(o całkowaniu przez części dla całki oznaczonej)*
Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ posiadają ciągłe pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$ w przedziale $[a,b]$, to

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Twierdzenie 57. *(o całkowaniu przez podstawienie dla całki oznaczonej)*
Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$. Jeśli funkcja $x = \varphi(t)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha,\beta]$ przy czym $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ i zbiór jej wartości zawarty jest w przedziale $[a,b]$, to zachodzi wzór

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Twierdzenie 58. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieparzysta i całkowalna na przedziale $[-a, a]$, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Twierdzenie 59. *Jeżeli funkcja $f(x)$ jest parzysta i całkowalna na przedziale $[-a, a]$, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Rozważmy funkcję $f(x)$ ciągłą na przedziale domkniętym $[a, b]$ i przyjmującą wartości nieujemne na tym przedziale. Pole obszaru D (zwanego trapezem krzywoliniowym) ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (osią Ox) i krzywą $y = f(x)$ jest liczbowo równe całce oznaczonej

$$|D| = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje w tym przedziale wartości niedodatnie, to pole obszaru D ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (osią Ox)
i krzywą $y = f(x)$ jest równe

$$|D| = -\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

CAŁKA NIEWŁAŚCIWA

Definicja 46. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[a,\infty)$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]\subset[a,\infty)$,$(b>a)$.*
Jeśli istnieje granica

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana I rodzaju funkcji f na przedziale $[a,\infty)$ i oznaczamy symbolem $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.
Zatem

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

W przypadku, gdy granica $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ istnieje mówmy, że całka jest zbieżna, a funkcję $f(x)$ nazywamy całkowalną w przedziale nieskończonym $[a,\infty)$.
Gdy granica nie istnieje lub jest niewłaściwa, mówimy, że całka jest rozbieżna.

Definicja 47. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(-\infty,b]$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]\subset(-\infty,b]$, $(b>a)$.*
Jeśli istnieje granica

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą Riemana I rodzaju funkcji f na przedziale $(-\infty,b]$ i oznaczamy symbolem $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$.
Zatem

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Definicja 48. *Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $(-\infty,\infty)$ i całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b]$, $(b>a)$.*
Całkę niewłaściwą funkcji $f(x)$ na przedziale $(-\infty,\infty)$ definiujemy za pomocą równości

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx+\int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$, zakładając, że obie całki po prawej stronie równości istnieją.

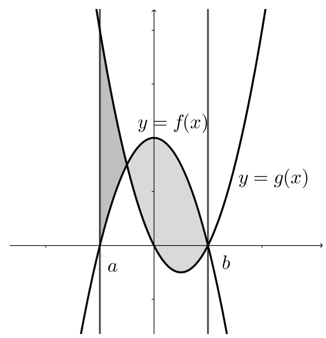
Uwaga 13. *Powyższa definicja nie zależy od wyboru $a\in\mathbb{R}$.*

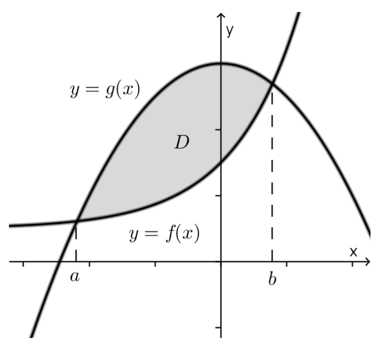
ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

Twierdzenie 60. *Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$, to pole obszaru D ograniczonego liniami $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ oraz $x = b$ określone jest wzorem*

$$|D| = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

W szczególności, gdy $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$, to pole obszaru D jest równe

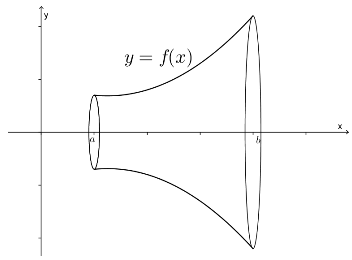




$$|D| = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

Twierdzenie 61. *Jeżeli funkcja $f(x)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[a, b]$, to długość łuku krzywej $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ określona jest wzorem*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$



Twierdzenie 62. *Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu wokół osi Ox krzywej $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ jest równa*

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx.$$

Twierdzenie 63. *Pole $|S|$ powierzchni obrotowej powstałej w wyniku obrotu wokół osi Ox krzywej $y = f(x)$ w przedziale $[a, b]$ jest równe*

$$|S| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$