ANALIZA MATEMATYCZNA Z ELEMENTAMI STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH

Definicja 1. *Niech A będzie dowolnym niepustym zbiorem.* ***Metryką*** *w zbiorze A nazywamy funkcję rzeczywistą*

$$d : A \times A \to \mathbb{R}$$

spełniającą warunki:

1. $\displaystyle\bigwedge_{a_1,a_2\in A} d(a_1,a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2,$
2. $\displaystyle\bigwedge_{a_1,a_2\in A} d(a_1,a_2) = d(a_2,a_1),$
3. $\displaystyle\bigwedge_{a_1,a_2,a_3\in A} d(a_1,a_2) + d(a_2,a_3) \geqslant d(a_1,a_3).$

Zbiór A ze zdefiniowaną w nim metryką d nazywamy ***przestrzenią metryczną*** *i oznaczamy (A,d).*

Najbardziej naturalnymi, znanymi nam przestrzeniami metrycznymi są:

1. prosta rzeczywista $\mathbb{R}$ z metryką określoną wzorem
$$\bigwedge_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} d(x_1,x_2) = |x_2 - x_1|,$$
2. płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z metryką określoną wzorem
$$\bigwedge_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2} d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2},$$
3. przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z metryką określoną wzorem
$$\bigwedge_{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3} d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Metryki te nazywamy **metrykami euklidesowymi**.

Definicja 2. *Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z wprowadzoną w niej odpowiednią metryką euklidesową nazywamy* ***przestrzenią euklidesową*** *wymiaru n.*

Definicja 3. *Niech (A, d) będzie przestrzenią metryczną.* ***Kulą (otwartą)*** *o środku w punkcie a_0 i promieniu $r > 0$ w przestrzeni A nazywamy zbiór*

$$K(a_0, r) = \{a \in A : d(a, a_0) < r\}.$$

Definicja 4. *Niech (A, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $B \subseteq A$. Punkt $a \in B$ nazywamy* ***punktem wewnętrznym zbioru*** *B, jeżeli istnieje kula $K(a, r)$ zawarta w zbiorze A.*

Definicja 5. *Zbiór B nazywamy* ***otwartym*** *w przestrzeni metrycznej (A, d), jeżeli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym.*

Twierdzenie 1. *Kula otwarta w przestrzeni metrycznej (A, d) jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.*

Definicja 6. *Zbiór B nazywamy* ***domkniętym*** *w przestrzeni metrycznej (A, d), jeżeli jego dopełnienie $A \backslash B$ jest zbiorem otwartym w tej przestrzeni.*

Definicja 7. *Niech (A, d) będzie przestrzenią metryczną.* ***Kulą domkniętą*** *o środku w punkcie a_0 i promieniu $r > 0$ w przestrzeni A nazywamy zbiór*

$$\bar{K}(a_0, r) = \{a \in A : d(a, a_0) \leqslant r\}.$$

Definicja 8. *Niepusty podzbiór B przestrzeni metrycznej (A, d) nazywamy* ***ograniczonym****, jeżeli istnieje w przestrzeni A istnieje kula zawierająca ten zbiór. W przeciwnym razie zbiór nazywamy* ***nieograniczonym****.*

Definicja 9. *Niech (A, d) będzie przestrzenią metryczną i niech (a_n), $n \in \mathbb{N}$ niech będzie ciągiem punktów tej przestrzeni. Ciąg (a_n), $n \in \mathbb{N}$ nazywamy* ***zbieżnym*** *w przestrzeni (A, d) do punktu a_0, jeżeli*

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, a_0) = 0.$$

Fakt ten zapisujemy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a_0 \ .$$

Twierdzenie 2. *Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej jest ograniczony.*

Definicja 10. *Niech (A, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $B \subseteq A$. Punkt $a_0 \in B$ nazywamy* ***punktem skupienia zbioru*** *B, jeżeli istnieje ciąg punktów zbioru B zbieżny do punktu a_0.*

Definicja 11. *Punkt $a \in B$ nazywamy* ***punktem izolowanym*** *zbioru B, jeżeli nie jest punktem skupienia zbioru B.*

Definicja 12. *Zbiór B nazywamy* ***zwartym*** *w przestrzeni metrycznej (A, d), jeżeli z każdego ciągu punktów zbioru B można wybrać podciąg zbieżny do pewnego punktu zbioru B.*

Twierdzenie 3. *Podzbiór B przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

Definicja 13. *Podzbiór* B *przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy* ***spójnym****, jeżeli każde jego dwa punkty można połączyć łamaną zawartą w zbiorze* B*.*
Definicja 14. *Podzbiór* B *przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy obszarem, jeżeli jest otwarty i spójny.*

Definicja 15. *Niech* $D \subset \mathbb{R}^2$ *. Funkcję* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *nazywamy* ***funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych o wartościach rzeczywistych****.*
Uwaga 1. *Jeśli nie umówimy się inaczej, to za dziedzinę uważamy dziedzinę naturalną, tzn. zbiór tych par* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, dla których wzór ma sens. Często w zastosowaniach praktycznych dziedzina jest ograniczona przez czynniki niematematyczne (np. rezystancja musi być dodatnia).*

Definicja 16. *Wykresem funkcji* $z = f(x, y)$ *określonej dla* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *nazywamy zbiór*

$$W = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\Big\}.$$

Wykresem funkcji dwóch zmiennych jest pewna powierzchnia w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Definicja 17. *Niech będzie dany ciąg* $(P_n) = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}$ *punktów przestrzeni* $\mathbb{R}^2$ *i niech* $P_0 = (x_0, y_0)$ *będzie punktem tej przestrzeni. Mówimy, że ciąg punktów* (P_n) *jest zbieżny do punktu* P_0 *albo, że granicą ciągu* (P_n) *jest* P_0 *, jeżeli ciąg odległości punktów* (P_n) *od punktu* P_0 *jest zbieżny do* 0 *czyli, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} d(P_n, P_0) = 0.$$

Zapisujemy to

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0.$$

Twierdzenie 4. *Jeżeli* $(P_n) = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}$ *jest ciągiem punktów przestrzeni* $\mathbb{R}^2$ *i punkt* $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, to*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Definicja 18. *Załóżmy, że* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$ *, i* P_0 *jest punktem skupienia zbioru* D*. Funkcja* f *ma w punkcie* P_0 *granicę* g*, gdy dla dowolnego ciągu* $(P_n) = (x_n, y_n),\ n \in \mathbb{N}$ *punktów zbioru* D *takiego, że* $P_n \neq P_0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ *, ciąg* $f(P_n)$ *ma granicę równą* g *, tzn.*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\bigwedge_{(P_n)\in D\setminus\{P_0\}\ n\in\mathbb{N}\wedge P_n\to P_0} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = g \right).$$

Uwaga 2. *Granicę zdefiniowaną powyżej nazywamy granicą podwójną, w odróżnieniu od granic iterowanych*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Definicja 19. *Niech f będzie funkcją, której dziedziną jest pewien podzbiór D przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $P_0 \in D$. Mówimy, że funkcja jest ciągła w punkcie P_0 jeśli granica funkcji f w punkcie P_0 istnieje i jest równa wartości funkcji w tym punkcie, co zapisujemy*

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Twierdzenie 5. *Suma, różnica i iloczyn funkcji ciągłych w punkcie P_0 są funkcjami ciągłymi w tym punkcie. Iloraz funkcji ciągłych w punkcie P_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie, jeśli dzielnik ma w tym punkcie wartość różną od zera.*

Twierdzenie 6. *(Weierstrassa)*
Niech funkcja f będzie ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcja f jest wówczas ograniczona w tym obszarze i osiąga w tym obszarze wartość najmniejszą i największą.

Twierdzenie 7. *(własność Darboux)*
Jeśli funkcja ciągła w obszarze D przyjmuje w tym obszarze wartości A oraz B, i jeśli $A < L < B$ lub $A > L > B$, to istnieje w obszarze D punkt, w którym funkcja przyjmuje wartość L.

Twierdzenie 8. *Jeśli funkcja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie P_0 i ma w tym punkcie wartość $f(P_0) > A$, to istnieje otoczenie U punktu P_0 takie, że dla każdego $P \in D \cap U$ zachodzi nierówność $f(P) > A$.*

Uwaga 3. *Twierdzenie pozostaje prawdziwe, jeśli zmienimy kierunek obu nierówności.*
Wniosek 1. *Funkcja ciągła i różna od zera w pewnym punkcie zachowuje swój znak w otoczeniu tego punktu.*

Definicja 20. *Niech $\vec{h} = [h_1, h_2]$ będzie dowolnym wektorem i niech $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$.* ***Pochodną kierunkową*** *funkcji f w punkcie P_0 w kierunku wektora $\vec{h}$ nazywamy liczbę*

$$f'_{\vec{h}}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0,y_0)}{t} \ .$$

Definicja 21. *Niech $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$.* ***Pochodną cząstkową*** *funkcji f względem zmiennej x w punkcie $P_0 =$*

(x_0, y_0) nazywamy pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ w kierunku wektora $[1, 0]$ tzn. granicę

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} .$$

Pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$ W skrócie pochodną $\frac{\partial f}{\partial x}$ oznaczamy też f'_x.

Definicja 22. *Niech $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$.* ***Pochodną cząstkową*** *funkcji f względem zmiennej y w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ nazywamy pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $P_0 = (x_0, y_0)$ w kierunku wektora $[0, 1]$ tzn. granicę*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} .$$

Pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennejx w punkcie (x_0, y_0) oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}$ W skrócie pochodną $\frac{\partial f}{\partial y}$ oznaczamy też f'_y.

Uwaga 4. *Z definicji pochodnych cząstkowych wynika, że obliczamy je stosując te same reguły różniczkowania jak dla funkcji jednej zmiennej, przy czym pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej x, obliczamy traktując y jako stałą, a pochodną cząstkową funkcji f względem zmiennej y, obliczamy traktując x jako stałą.*

Jeśli funkcja f ma w każdym punkcie obszaru D pochodną cząstkową f'_x, to f'_x jest funkcją określoną w obszarze D i można ją różniczkować względem zmiennej x lub zmiennej y. Otrzymane funkcje nazywać będziemy pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji f. Oznaczamy je następującymi symbolami:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{lub} \qquad f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \text{lub} \qquad f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \text{lub} \qquad f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \text{lub} \qquad f''_{xy}$$

Pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nazywamy pochodnymi mieszanymi rzędu drugiego.

Twierdzenie 9. *(Schwarza)*
Jeżeli pochodne mieszane f''_{xy} i f''_{yx} istnieją i są ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to są one równe w tym punkcie.

Uwaga 5. *O funkcji, która ma ciągłe pochodne rzędu k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, w pewnym obszarze D mówimy, że jest klasy C_k w tym obszarze.*

Definicja 23. *Załóżmy teraz, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0). Mówimy, że funkcja f osiąga w punkcie (x_0, y_0) maksimum (minimum) lokalne, jeżeli istnieje sąsiedztwo S punktu (x_0, y_0) takie, że*

$$\bigwedge_{(x,y)\in S} f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \qquad \left(\bigwedge_{(x,y)\in S} f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y) \right)$$

Gdy nierówności są ostre, to mówimy o maksimum (minimum) lokalnym właściwym.

Twierdzenie 10. *Twierdzenie (warunek konieczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych)*
Jeśli funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to obie pochodne cząstkowe 1 rzędu w tym punkcie są równe zeru

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Uwaga 6. *Punkty, w których funkcja spełnia warunek konieczny istnienia ekstremu lokalnego nazywamy* ***punktami stacjonarnymi*** *lub* ***krytycznymi*** *funkcji.*
Uwaga 7. *Warunek konieczny nie jest warunkiem wystarczającym.*

Definicja 24. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego w obszarze D. Wyróżnikiem funkcji f nazywamy funkcję*

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} \qquad (x, y) \in D.$$

Twierdzenie 11. *(warunek wystarczający ekstremum funkcji dwóch zmiennych)*
Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) i ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w tym punkcie równe zeru

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

oraz wyróżnik funkcji f jest w tym punkcie dodatni

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to funkcja ta ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum właściwe.
Charakter tego ekstremum zależy od znaku drugich pochodnych czystych w tym punkcie $f''_{xx}(x_0, y_0)$ lub $f''_{yy}(x_0, y_0)$ (w punkcie (x_0, y_0) mają one ten sam znak).
Jeśli są one dodatnie, to funkcja ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe, a jeśli ujemne – maksimum lokalne właściwe.
Twierdzenie 12. *Jeśli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) i ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w tym punkcie równe zeru*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \wedge \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

oraz wyróżnik funkcji f jest w tym punkcie ujemny

$$W(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0,$$

to funkcja ta ***nie ma*** *w punkcie (x_0, y_0)* ***ekstremum****.*
Definicja 25. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie (x_0, y_0).*
Gradientem *funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor $\nabla f(x_0, y_0)$, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie (x_0, y_0), to znaczy*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left[f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right].$$

Inne oznaczenie gradientu to grad f.
Twierdzenie 13. *(związek pochodnej kierunkowej z gradientem) Niech f będzie funkcją różniczkowalną w punkcie (x_0, y_0) i $\vec{h} = [h_1, h_2]$ niech będzie dowolnym wektorem.*
Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie (x_0, y_0), w kierunku wektora $\vec{h}$ jest równa iloczynowi skalarnemu gradientu tej funkcji w punkcie (x_0, y_0) i wektora $\vec{h}$.

$$f'_{\vec{h}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} = \left[f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0) \right] \cdot [h_1, h_2].$$

Definicja 26. *Niech $F(x, y)$ będzie funkcją określoną na pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Każdą funkcję $y = f(x)$ ciągłą na pewnym przedziale I taką, że istnieje punkt $x \in I$ taki, że $F(x, f(x)) = 0$ nazywamy* ***funkcją uwikłaną*** *określoną równaniem $F(x, y) = 0$.*
Równanie to nazywamy postacią uwikłaną funkcji $y = f(x)$.
Twierdzenie 14. *(o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej)*
Jeżeli F jest

1. *funkcją klasy C^1 na pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) ,*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$,*
3. *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,*

to

- *na pewnym otoczeniu* $U = \{(x, y) : \ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \eta < y < y_0 + \eta\}$ *punktu* (x_0, y_0) *równanie* $F(x, y) = 0$ *określa dokładnie jedną funkcję uwikłaną* $y = f(x)$,
- *funkcja ta dla* $x = x_0$ *przyjmuje wartość* y_0*, czyli* $f(x_0) = y_0$,
- *funkcja* f *jest ciągła na przedziale* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Twierdzenie 15. *(o pochodnej funkcji uwikłanej)*
Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej, to funkcja uwikłana $y = f(x)$ *dana równaniem* $F(x_0, y_0) = 0$ *ma na pewnym przedziale* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *ciągłą pochodną określoną wzorem*

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \ .$$

Twierdzenie 16. *(o drugiej pochodnej funkcji uwikłanej) Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej oraz funkcja* F *jest klasy* C^2 *na otoczeniu* U *punktu* (x_0, y_0)*, to funkcja uwikłana* $y = f(x)$ *dana równaniem* $F(x, y_0) = 0$ *ma na pewnym przedziale* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *drugą pochodną określoną wzorem*

$$y''(x) = -\frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{yy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3} \ .$$

Twierdzenie 17. *(warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji uwikłanej)*
Jeżeli

1. *funkcja* F *jest klasy* C^2 *w pewnym otoczeniu punktu* (x_0, y_0)
2. $F(x_0, y_0) = 0 \quad i \quad F'_x(x_0, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,
4. $I(x_0, y_0) = -\dfrac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \neq 0$,

to funkcja uwikłana $y = f(x)$ *określona równaniem* $F(x, y) = 0$ *i spełniająca warunek* $y(x_0) = y_0$ *ma w punkcie* x_0 *ekstremum lokalne równe* y_0.
Jest to maksimum, gdy $I(x_0, y_0) < 0$*, zaś minimum, gdy* $I(x_0, y_0) > 0$.

CAŁKA PODWÓJNA

Definicja 27. *Obszar domknięty $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy **normalnym względem osi** Ox, jeżeli*

$$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b \quad \wedge \quad g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}}$$

gdzie g i h są funkcjami ciągłymi na przedziale $[a,b]$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in (a,b)$.

Uwaga 8. *Mówiąc bardziej obrazowo, obszar normalny względem osi Ox, to taki, który „w całości” leży w pasie równoległym do osi Oy, a „z góry” i „z dołu” jest ograniczony wykresami funkcji ciągłych zmiennej x.*

Definicja 28. *Obszar domknięty $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy **normalnym wzgledem osi** Oy, jeżeli*

$$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d \quad \wedge \quad k(y) \leqslant x \leqslant l(y)\}}$$

gdzie k i l są funkcjami ciągłymi na przedziale $[c,d]$ oraz $k(y) < l(y)$ dla $y \in (c,d)$.

Uwaga 9. *Mówiąc bardziej obrazowo, obszar normalny względem osi Oy, to taki, który „w całości” leży w pasie równoległym do osi Ox, a „z lewej” i „z prawej” strony jest ograniczony wykresami funkcji ciągłych zmiennej y.*

Definicja 29. ***Obszarem regularnym*** *nazywamy obszar domknięty $D \subset \mathbb{R}^2$, który można przedstawić jako sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem jednej lub drugiej osi układu współrzędnych, które nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.*

Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną na pewnym obszarze regularnym $D \subset \mathbb{R}^2$. Dzielimy obszar D na n domkniętych obszarów D_i w ten sposób, aby nie miały wspólnych punktów wewnętrznych. Niech Δ_i oznacza pole obszaru D_i, zaś d_i kres górny odległości dowolnych dwóch punktów obszaru D_i. Średnicą podziału obszaru D na podobszary D_i nazywamy liczbę $\delta_n = max\{d_1, \ldots, d_n\}$. Jeżeli $\delta_n \to 0$, gdy $n \to \infty$, to ciąg podziałów nazywamy normalnym. Wybierzmy teraz w każdym ze zbiorów D_i dowolny punkt $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

Definicja 30. ***Sumą całkową Riemanna*** *funkcji f na obszarze regularnym D nazywamy wyrażenie*

$$S_n = f(\bar{x_1}, \bar{y_1}) \cdot \Delta D_1 + \ldots + f(\bar{x_n}, \bar{y_n}) \cdot \Delta D_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x_i}, \bar{y_i}) \Delta D_i \ .$$

Definicja 31. *Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów obszaru D i każdego wyboru punktów pośrednich $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ w obszarach częściowych istnieje ta sama skończona granica ciągu (S_n), to granicę tę nazywamy całką podwójną funkcji f na obszarze D i oznaczamy symbolem $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.*

Zatem

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta D_i \ .}$$

Definicja 32. *Funkcję f, dla której istnieje całka podwójna na obszarze D, nazywamy funkcją całkowalną na obszarze D.*
Twierdzenie 18. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na obszarze regularnym D, to jest funkcją ograniczoną na tym obszarze.*
Twierdzenie 19. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze regularnym D, to jest funkcją całkowalną na tym obszarze.*
Twierdzenie 20. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na obszarze regularnym D, to również funkcja $k \cdot f$ jest całkowalna na tym obszarze i zachodzi równość*

$$\boxed{\iint\limits_D k \cdot f(x,y)dxdy = k \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy.}$$

Twierdzenie 21. *Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na obszarze regularnym D, to również ich suma jest całkowalna na tym obszarze i zachodzi równość*

$$\boxed{\iint\limits_D \left[f(x,y) + g(x,y)\right] dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.}$$

Twierdzenie 22. *Jeżeli obszar regularny D jest sumą obszarów regularnych D_1 i D_2 niemających wspólnych punktów wewnętrznych, to*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.}$$

Twierdzenie 23. *Jeżeli funkcja f jest całkowalna na obszarze regularnym D oraz $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ dla dowolnych $(x,y) \in D$, to*

$$m \cdot |D| \leqslant \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leqslant M \cdot |D|.$$

Twierdzenie 24. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b \quad \wedge \quad g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

normalnym względem osi Ox, to

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y=g(x)}^{y=h(x)} f(x,y)dy\right] dx.}$$

Twierdzenie 25. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d \quad \wedge \quad k(y) \leqslant x \leqslant l(y)\}$$

normalnym względem osi Oy, to

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{x=k(y)}^{x=l(y)} f(x, y)dx \right] dy.}$$

Zamiana zmiennych w całce podwójnej

Rozważmy przekształcenie pewnego obszaru $\Delta \in \mathbb{R}^2$ na obszar $D \in \mathbb{R}^2$ opisane wzorami

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \qquad (u, v) \in \Delta,$$

gdzie funkcje $x(u, v)$ oraz $y(u, v)$ są klasy C^1 na pewnym obszarze zawierającym obszar Δ.

Definicja 33. ***Jakobianem*** *podanego wyżej przekształcenia nazywamy wyznacznik funkcyjny*

$$\boxed{J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.}$$

Twierdzenie 26. *(o zamianie zmiennych w całce podwójnej)*
Jeżeli

1. *funkcja $f(x, y)$ jest ciągła na obszarze regularnym D,*
2. *przekształcenie $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ przekształca obszar regularny Δ na obszar D, przy czym wnętrze obszaru Δ przekształcane jest wzajemnie jednoznacznie na wnętrze obszaru D,*
3. *funkcje $x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$ są klasy C^1 na pewnym obszarze zawierającym obszar Δ, to*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)|dudv.}$$

Gdy obszar, po którym całkujemy jest kołem, wycinkiem koła, pierścieniem lub jego wycinkiem, wygodnie jest stosować współrzędne biegunowe. Dowolny punkt płaszczyzny opisujemy wówczas też za pomocą uporządkowanej pary liczb. Są to długość promienia wodzącego, czyli odległość punktu od początku układu współrzędnych oraz kąt jaki tworzy promień wodzący z dodatnią półosią osi Ox w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Wniosek 2. *Przy zamianie współrzędnych kartezjańskich (prostokątnych) na biegunowe stosujemy przekształcenie*

$$\boxed{x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi}$$

gdzie $r \geqslant 0$ *zaś* ϕ *przyjmuje wartości z dowolnego przedziału o długości* 2π.
Wówczas

$$J(r,\phi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Uwaga 10. *Gdy obszar po którym całkujemy jest kołem o środku w punkcie* $(0,0)$, *wycinkiem koła, pierścieniem lub jego wycinkiem, przesuniętym o wektor* $\vec{u} = [p,q]$ *możemy zastosować przesunięte współrzędne biegunowe*

$$\boxed{x = r\cos\varphi + p, \quad y = r\sin\varphi + q.}$$

Wówczas jakobian takiego przekształcenia jest także równy r

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (r\cos\varphi + p)'_r & (r\cos\varphi + p)'_\varphi \\ (r\sin\varphi + q)'_r & (r\sin\varphi + q)'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Twierdzenie 27. *Jeżeli funkcja* f *jest ciągła na pewnym obszarze regularnym* $D \subset \mathbb{R}^2$, *to objętość obszaru przestrzennego*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D \wedge 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}$$

jest liczbowo równa

$$|V| = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Wniosek 3.

$$|D| = \iint_D 1dxdy.$$

Twierdzenie 28. *Jeżeli funkcje* f *i* g *są ciągłe na pewnym obszarze regularnym* $D \subset \mathbb{R}^2$, *to objętość obszaru przestrzennego*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D \wedge f(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\}$$

jest liczbowo równa

$$|V| = \iint_D [g(x,y) - f(x,y)]dxdy.$$

Definicja 34. *Niech f będzie fukcją klasy C^1 na obszarze domkniętym $D \subset \mathbb{R}^2$.* ***Płatem powierzchniowym regularnym*** *nazywamy zbiór*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}.$$

Twierdzenie 29. *Jeżeli $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}$ jest płatem regularnym, to jego pole $|S|$ jest równe*

$$|S| = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dxdy.$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Definicja 35. ***Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego*** *nazywamy równanie postaci*

$$F(x, y, y') = 0,$$

gdzie F jest pewną funkcją 3 zmiennych, w którym niewiadomą jest funkcja $y(x)$, i w którym występuje pochodna tej funkcji.

Definicja 36. *Równanie różniczkowe postaci*

$$y' = f(x, y),$$

gdzie f jest pewną funkcją dwóch zmiennych, określoną na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy równaniem różniczkowym rzędu pierwszego w ***postaci normalnej****.*

Definicja 37. ***Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną)*** *równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ w zbiorze X nazywamy funkcję spełniającą to równanie w każdym punkcie tego zbioru.*
Wykres każdego rozwiązania szczególnego równania różniczkowego nazywamy ***krzywą całkową*** *tego równania.*

Definicja 38. ***Zagadnieniem Cauchy'ego*** *dla równania różniczkowego rzędu pierwszego nazywamy następujące zagadnienie:*
znaleźć całkę szczególną danego równania, która spełnia warunek początkowy

$$y(x_0) = y_0$$

przy czym liczby x_0, y_0 , zwane wartościami początkowymi, są dane.

Definicja 39. ***Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną)*** *równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ nazywamy rodzinę (zbiór) krzywych całkowych tego równania zależną od jednego parametru, którego wartość można dobrać tak, aby otrzymać krzywą całkową spełniającą warunek początkowy*

$$y(x_0) = y_0$$

dla każdego układu wartości początkowych (x_0, y_0) , dla którego taka krzywa istnieje.

Definicja 40. ***Kierunkiem równania różniczkowego***

$$y' = f(x, y)$$

w punkcie (x_0, y_0) nazywamy prostą o współczynniku kierunkowym $f(x_0, y_0)$ przechodzącą przez punkt (x_0, y_0).

Definicja 41. ***Polem kierunków*** *równania różniczkowego*

$$y' = f(x, y)$$

nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $(x, y) \in D$ kierunku równania w tym punkcie.

Definicja 42. *Rozwiązanie szczególne $y = g(x), \quad x \in (a, b)$ nazywamy* ***rozwiązaniem regularnym*** *danego równania różniczkowego, jeżeli przez każdy punkt krzywej całkowej określonej tym rozwiązaniem nie przechodzi inne rozwiązanie tego równania.*
Definicja 43. *Rozwiązanie szczególne $y = g(x), \quad x \in (a, b)$ nazywamy* ***rozwiązaniem osobliwym*** *danego równania różniczkowego, jeżeli przez każdy punkt krzywej całkowej określonej tym rozwiązaniem przechodzi co najmniej jeszcze jedno, inne rozwiązanie tego równania.*

Równania różniczkowe rzędu pierwszego

Rozważmy równanie różniczkowe

$$y' = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

z niewiadomą funkcją $y = y(x)$.
Twierdzenie 30. *(Peano - o istnieniu rozwiązania)*
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, to przez każdy punkt wewnętrzny tego obszaru przechodzi co najmniej jedna krzywa całkowa tego równania.
Twierdzenie 31. *(Cauchy'ego - o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania)*
Jeżeli prawa strona równania $y' = f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze D oraz ma w tym obszarze ciągłą pochodną $f'_y(x, y)$, to przez każdy punkt wewnętrzny (x_0, y_0) tego obszaru przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.

Wnioski z twierdzenia Cauchy'ego
Wniosek 4. *Krzywe całkowe równania $y' = f(x, y)$ nie przecinają się żadnym punkcie wewnętrznym obszaru D.*
Wniosek 5. *Każde rozwiązanie (krzywą całkową) równania $y' = f(x, y)$ można przedłużyć do brzegu obszaru D.*
Wniosek 6. *Jeżeli $D = \{(x, y) : x \in (a, b) \wedge g_1(x) < y < g_2(x)\}$, to przedział, w którym istnieje dane rozwiązanie szczególne, jest zawarty w przedziale (a, b).*

Równania o zmiennych rozdzielonych

Definicja 44. *Niech g i h będą funkcjami rzeczywistymi, ciągłymi odpowiednio na przedziałach (a, b) oraz (c, d) (przedziały te mogą być skończone lub nieskończone).* ***Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych*** *nazywamy równanie postaci*

$$y' = h(x) \cdot g(y),$$

w którym niewiadomą funkcją jest funkcja $y = y(x)$.
Gdy $g(y) \neq 0$ dla $y \in (c, d)$, równanie to możemy też zapisać w postaci

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Twierdzenie 32. *Jeżeli funkcje h i g będą funkcjami ciągłymi odpowiednio na przedziałach* (a, b) *oraz* (c, d) *oraz* $g(y)$ *jest różna od zera dla* $y \in (c, d)$*, to przez każdy punkt* (x_0, y_0) *obszaru*

$$D = \{(x, y) : a < x < b \ , \ c < y < d\}$$

przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $y = y(x)$ *równania*

$$y' = h(x) \cdot g(y)$$

spełniająca warunek $y(x_0) = y_0$.
Krzywa ta określona jest wzorem

$$y(x) = G^{-1}(H(x) - H(x_0) + G(y_0)) \qquad \text{dla każdego} \qquad x \in I \subset (a, b).$$

H *i* G *są dowolnymi funkcjami pierwotnymi odpowiednio funkcji* h *i* $\frac{1}{g}$.

Definicja 45. *Równanie różniczkowe*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

gdzie f(x) jest funkcją ciągłą na pewnym przedziale, nazywamy ***równaniem różniczkowym jednorodnym względem*** x ***i*** y.

Równanie to można sprowadzić do równania o rozdzielonych zmiennych za pomocą podstawienia $y = u \cdot x$.

Równania różniczkowe liniowe I rzędu

Definicja 46. *Równanie różniczkowe*

$$y' + p(x)y = f(x),$$

gdzie p(x) i f(x) są danymi funkcjami, ciągłymi w pewnym przedziale (a, b)*, nazywamy* ***równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego****.*
Równanie $y' + p(x)y = f(x)$ *nazywamy* ***jednorodnym****, jeżeli funkcja* $f(x)$ *jest tożsamościowo równa zeru w rozważanym przedziale. W przeciwnym przypadku, równanie nazywamy* ***niejednorodnym****.*

Twierdzenie 33. *Jeżeli funkcja p(x) jest ciągła w przedziale (a,b), to całka ogólna równania* $y' + p(x)y = 0$ *jest postaci*

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R},$$

a ponadto przez każdy punkt (x_0, y_0) *obszaru*

$$P = \{(x, y) : a < x < b \ , \ c < y < d\}$$

przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.

Jeżeli znamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego uzyskamy stosując

- **metodę uzmienniania stałej** lub
- **metodę przewidywania**.

Pierwsza z nich jest metodą uniwersalną, zaś druga może być stosowana tylko wtedy, gdy funkcja p(x) jest stała, a prawa strona równania ma pewną szczególną postać.
Twierdzenie 34. *Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (RORN)* $y'+p(x)y = f(x)$ *może być zawsze przedstawione w postaci sumy dwóch rozwiązań:*

- *rozwiązania ogólnego równania jednorodnego* $y' + p(x)y = 0 \qquad (RORJ)$ *oraz*
- *rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego* $y' + p(x)y = f(x) \qquad (RSRN)$.

W skrócie

RORN=RORJ+RSRN

Jedną z metod znajdowania rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (RSRN) jest **metoda przewidywania**, która może być stosowana tylko wtedy, gdy funkcja p(x) jest stała, a prawa strona równania ma postać

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right], \qquad m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 35. *Jeżeli w równaniu różniczkowym liniowym niejednorodnym*

$$y' + py = f(x), \quad p = const$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right], \qquad m, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

to rozwiązanie szczególne (RSRN) tego równania przewidujemy w postaci

$$y_s = \begin{cases} e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right], & gdy\ \alpha \neq -p \\ x\cdot e^{\alpha x}\left[R_k(x)\cos\beta x + S_k(x)\sin\beta x\right] & gdy\ \alpha = -p \quad k = \max\{m, n\}. \end{cases}$$

Twierdzenie 36. *Jeżeli funkcja* $y_1(x)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$y' + py = f_1(x)\ \ dla\ x \in (a, b)\ ,$$

a funkcja $y_2(x)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$y' + py = f_2(x)\ \ dla\ x \in (a, b)\ ,$$

to funkcja $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ *jest rozwiązaniem równania*

$$y' + py = f_1(x) + f_2(x)\ \ dla\ x \in (a, b).$$

Definicja 47. *Równaniem różniczkowym **Bernoulli'ego** nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego postaci*

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1.$$

Uwaga 11. *Jeżeli $\alpha = 0$, to równanie jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym, a gdy $\alpha = 1$, równanie jest równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym.*