Algebra liniowa z geometrią

Materiały do ćwiczeń

Zespół matematyków przy WEEiA

Spis treści

Rozkład zajęć

Tydzień	Wykład	Ćwiczenia
1.	Geometria	Macierze - działania
2.	Geometria	Macierze - działania
3.	Geometria	Wyznaczniki
4.	Geometria	Wyznaczniki
5.	Geometria	Macierz odwrotna
6.	Geometria	Układy równań
7.	Grupa, podgrupa	Układy równań
8.	Ciało, podciało	Układy równań
9.	Przestrzeń wektorowa	**Kolokwium nr 1**
10.	Liniowa zależność wektorów	Liczby zespolone
11.	Odwzorowania liniowe	Liczby zespolone
12.	Wartości i wektory własne	Liczby zespolone
13.	Wartości i wektory własne	Liczby zespolone
14.	Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona	Liczby zespolone
15.	Godzina zapasowa	**Kolokwium nr 2**

! Kolokwia obejmują również materiał realizowany w czasie wykładu:

- **Kolokwium nr 1** – wykłady 1-8,
- **Kolokwium nr 2** – wykłady 9-14.

1. Macierze i wyznaczniki

1.1 Macierze i ich rodzaje

Definicja. Niech X będzie niepustym zbiorem oraz $m,n \in \mathbb{N}$. **Macierzą** o m wierszach i n kolumnach ($m \times n$-macierzą, macierzą wymiaru $m \times n$) o wyrazach w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję

$$A : \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} \to X.$$

Jeżeli $X = \mathbb{R}$, to mówimy wtedy o macierzy rzeczywistej. Liczby m i n nazywamy **wymiarami macierzy** A. Zbiór wszystkich macierzy wymiaru $m \times n$ o wyrazach ze zbioru X oznaczamy symbolem $M_{m,n}(X)$. Jeśli zbiór X jest ustalony, dla skrócenia zapisu będziemy używali notacji $M_{m,n}$.

Przyjmujemy następujące oznaczenie

$$a_{ij} = A(i,j).$$

Wówczas piszemy

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \quad \text{lub} \quad A = [a_{ij}]$$

i macierz A reprezentujemy w postaci tablicy

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & i\text{-ty wiersz} \\ j\text{-ta kolumna} & \end{array}$$

Mówimy, że dwie macierze $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}(X)$ są równe, gdy

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{dla } i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Piszemy wtedy $A = B$.

Definicja.

- Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ nazywamy **macierzą zerową**, jeśli $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Oznaczamy ją przez 0.
- Jeżeli $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(X)$ i $m = n$, to A nazywamy **macierzą kwadratową**. Wyrazy $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ nazywamy **główną przekątną** macierzy A.

Definicja. Załóżmy teraz, że $A = [a_{ij}]$ jest macierzą kwadratową stopnia n o wyrazach rzeczywistych.

- Macierz A ($n \geq 2$) nazywamy **macierzą trójkątną górną** (**dolną**), gdy

$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i > j\ (i < j),$$

  czyli gdy pod (nad) główną przekątną są same zera.
- Macierz A nazywamy macierzą **diagonalną**, gdy

$$a_{ij} = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,$$

  czyli gdy poza główną przekątną są same zera.
  Jeśli przy tym $a_{ii} = 1$ dla $i = 1,2,\ldots,n$, to A nazywamy **macierzą jednostkową** stopnia n i oznaczamy symbolem I_n

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Macierz A ($n \geq 2$) nazywamy **macierzą symetryczną**, gdy

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{dla} \quad \text{dla } i > j,$$

  czyli gdy wyrazy macierzy A są rozmieszczone symetrycznie względem głównej przekątnej.
- Macierz A ($n \geq 2$) nazywamy **macierzą antysymetryczną**, gdy

$$a_{ij} = -a_{ji}. \quad \text{dla} \quad \text{dla } i > j.$$

1.2 Operacje na macierzach

W tym paragrafie mówimy tylko o macierzach o wyrazach rzeczywistych.

Definicja. Niech $A, B \in M_{m,n}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$.

- **Sumą macierzy** A i B nazywamy macierz $A + B \in M_{m,n}$ zdefiniowaną jako

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

- Jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}$, to **iloczynem macierzy** A **przez liczbę** α nazywamy macierz $\alpha A \in M_{m,n}$

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

Twierdzenie. Jeśli A, B i C są macierzami rzeczywistymi tego samego wymiaru oraz α i β dowolnymi liczbami, to

1) $A+B=B+A$;
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3) $A+0=A$;
4) $A+(-A)=0$, gdzie $-A=[-a_{ij}]$, jeśli $A=[a_{ij}]$;
5) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
6) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
7) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
8) $1A=A$.

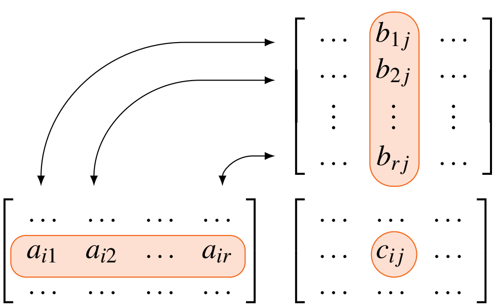
Definicja. Jeżeli $A \in M_{m,r}$ i $B \in M_{r,n}$, $A=[a_{ik}]$, $B=[b_{kj}]$, to **iloczynem macierzy** A i B nazywamy macierz $A\cdot B=[c_{ij}] \in M_{m,n}$, gdzie

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ir}b_{rj}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}.$$

Jeżeli $\mathbf{u}=[u_1,\ldots,u_n]$ i $=[w_1,\ldots,w_n]$, to iloczynem skalarnym $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$ nazywamy liczbę

$$\mathbf{u}\circ\mathbf{w}=u_1w_1+u_2w_2+\ldots+u_nw_n.$$

Iloczyn macierzy A i B powstaje w ten sposób, że wyraz c_{ij} jest równy iloczynowi skalarnemu $[a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}]$ i $[b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{rj}]$.



Twierdzenie. Przy założeniu, że poniższe działania na macierzach są wykonalne, zachodzą równości

1) $A(B+C)=AB+AC$;
2) $(A+B)C=AB+BC$;
3) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$ dla dowolnej liczby α;
4) $A(BC)=(AB)C$;
5) $I_mA=AI_n=A$, gdy $A\in M_{m,n}$.

Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

Definicja. Jeżeli $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$, to macierzą **transponowaną** do A nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}] \in M_{n,m}$, gdzie

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Twierdzenie. Jeżeli poniższe działania są wykonalne, to

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3) $\left(A^T\right)^T = A$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$;
5) macierz kwadratowa A jest symetryczna (antysymetryczna) wtedy i tylko wtedy, gdy $A^T = A$ $(A^T = -A)$.

1.3 Wyznacznik macierzy

W tym paragrafie mówimy tylko o macierzach liczbowych.

Definicja. **Wyznacznikiem** macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n nazywamy liczbę $\det A$ określoną w następujący sposób:

- gdy $n = 1$, $A = [a_{11}]$,
$$\det A = a_{11};$$
- gdy $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$
- gdy $n > 2$, to
$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1}W_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}W_{12} + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n}W_{1n},$$
gdzie W_{1j} oznacza wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia $n-1$ powstałej z A przez wykreślenie pierwszego wiersza oraz j-tej kolumny.

Jeżeli $A = [a_{ij}]$, to zapisujemy

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

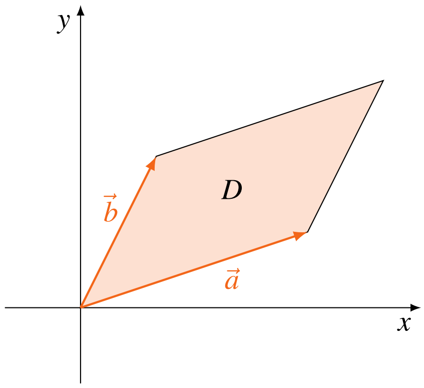
! Do obliczania wyznacznika macierzy **stopnia 3** można użyć tzw. **metody Sarrusa**

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \multicolumn{5}{|c|}{} & & \\
 & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & \\
 & & & \searrow & & \swarrow & & & \\
 & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & \\
 & & & \times & & \times & & & \\
 & & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & \\
\hline
 & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\
- & & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & + \\
 & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\
- & & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & + \\
 & \swarrow & & & & & & \searrow & \\
- & & & & & & & & +
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{l}
(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) \\
-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})
\end{array}$$

Geometryczna interpretacja wyznacznika

- Jeżeli $A \in M_{2,2}$, to $|\det A|$ jest równe polu powierzchni równoległoboku D rozpiętego na wierszach (kolumnach) macierzy A (rozumianych jako odpowiednie wektory na płaszczyźnie). W szczególności, jeśli $\det A = 0$, to wektory te są równoległe.

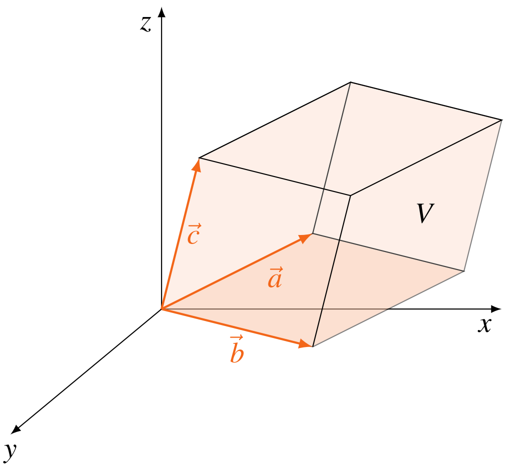
$$|D| = \left|\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right|$$



Rys. 1.1: $\vec{a} = [a_{11}, a_{12}]$, $\vec{b} = [a_{21}, a_{22}]$

- Jeżeli $A \in M_{3,3}$, to $|\det A|$ jest równe objętości równoległościanu V rozpiętego na wierszach (kolumnach) macierzy A (rozumianych jako odpowiednie wektory w przestrzeni). W szczególności, jeśli $\det A = 0$, to wektory te leżą w jednej płaszczyźnie.

$$|V| = \left|\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right|$$



Rys. 1.2: $\vec{a} = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]$, $\vec{b} = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]$, $\vec{c} = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$

Twierdzenie. (Własności wyznacznika macierzy)

1) $\det A^T = \det A$.
2) Jeżeli pewien wiersz (pewna kolumna) macierzy A składa się z samych zer, to $\det A = 0$.
3) Jeżeli macierz A ma dwa takie same wiersze (dwie takie same kolumny), to $\det A = 0$.
4) Jeżeli macierz A ma dwa proporcjonalne wiersze (dwie proporcjonalne kolumny), to $\det A = 0$.
5) Jeżeli A jest macierzą trójkątną górną (dolną), to wyznacznik A jest równy iloczynowi wyrazów z głównej przekątnej
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$
W szczególności $\det I = 1$.
6) Jeżeli macierz B powstaje z macierzy A przez zamianę dwóch wierszy (kolumn), to
$$\det B = -\det A$$
7) Jeżeli macierz B powstaje z A przez przemnożenie pewnego wiersza (pewnej kolumny) macierzy A przez liczbę α, to
$$\det B = \alpha \det A.$$
W szczegoólności, jeśli A jest macierzą n-tego stopnia, to
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$
8) Wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli do pewnego wiersza (pewnej kolumny) dodamy inny wiersz (inną kolumnę) pomnożony przez dowolną liczbę.

Definicja. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. **Dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} nazywamy liczbę
$$a_{ij}^* = (-1)^{i+j} W_{ij},$$
gdzie W_{ij} jest wyznacznikiem macierzy powstałej z A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Twierdzenie. (Laplace'a o rozwijaniu wyznacznika względem wiersza lub kolumny) Jeżeli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$, to dla dowolnych liczb $i_0, j_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzą równości
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} a_{i_0 j}^* = a_{i_0 1} a_{i_0 1}^* + a_{i_0 2} a_{i_0 2}^* \ldots + a_{i_0 n} a_{i_0 n}^*$$
(rozwinięcie względem wiersza i_0)
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0} a_{i j_0}^* = a_{1 j_0} a_{1 j_0}^* + a_{2 j_0} a_{2 j_0}^* \ldots + a_{n j_0} a_{n j_0}^*$$
(rozwinięcie względem kolumny j_0)

Twierdzenie. (Cauchy'ego) Jeżeli A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to
$$\det(AB) = \det A \det B.$$

1.4 Macierz odwrotna

Definicja. Mówimy, że macierz kwadratowa A stopnia n jest **odwracalna**, jeżeli istnieje taka macierz B, że
$$AB = BA = I_n.$$
Taka macierz B jest jednoznacznie wyznaczona. Nazywamy ją **macierzą odwrotną** do A i oznaczamy symbolem A^{-1}. Zatem
$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Definicja. Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, jeżeli
$$\det A \neq 0;$$
w przeciwnym wypadku A nazywamy **macierzą osobliwą**.

Zauważmy, że jeśli A jest odwracalna, to jest nieosobliwa, przy czym $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Istotnie
$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$
i stąd
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$
Zachodzi też fakt odwrotny: jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to jest odwracalna. Dostajemy więc

Twierdzenie. Macierz kwadratowa jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest odwracalna. Jeśli $A = [a_{ij}]$ jest macierzą kwadratową i $\det A \neq 0$, to
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left[a_{ij}^*\right]^T,$$
gdzie a_{ij}^* oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}.

Twierdzenie. **(Własności macierzy odwrotnej)** Jeśli A i B są macierzami nieosobliwymi tego samego wymiaru, to
1) $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$;
2) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
4) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
5) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$ dla dowolnej liczby $\alpha \neq 0$.

2. Układy równań liniowych

2.1 Podstawowe definicje

Definicja. **Układem** m **równań liniowych** z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, nazywamy każdy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

gdzie a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ oraz b_i $(i = 1, \ldots, m)$ są ustalonymi liczbami.
Rozwiązaniem układu równań liniowych (2.1) nazywamy każdy ciąg liczb $(x_1, \ldots, x_n)$ spełniający ten układ.

Definicja. Mówimy, że układ równań (2.1) jest
- **sprzeczny**, gdy nie ma rozwiązań,
- **oznaczony**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczony**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Układ równań liniowych (2.1) można zapisać w tzw. postaci macierzowej

$$AX = B, \tag{2.2}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy **macierzą układu** (2.1), zaś macierz B – **kolumną wyrazów wolnych**.

Definicja. Układ równań liniowych postaci

$$AX = 0$$

nazywamy **układem jednorodnym**.

Jednym z rozwiązań układu jednorodnego jest rozwiązanie zerowe

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2.2 Twierdzenie Cramera

Definicja. **Układem równań Cramera** nazywamy układ

$$AX = B,$$

w którym A jest (kwadratową) macierzą nieosobliwą.

Twierdzenie. **(Cramera)** Układ równań Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$X = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix},$$

gdzie $W = \det A$ oraz W_j $(j = 1, \ldots, n)$ oznacza wyznacznik macierzy, która powstaje przez zastąpienie j-tej kolumny macierzy A kolumną wyrazów wolnych, tzn.

$$W_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Wniosek. Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe.

2.3 Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera-Capellego

Definicja. **Minorem stopnia** r $(r \in \mathbb{N})$ macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z A przez skreślenie pewnej liczby wierszy lub kolumn macierzy A. W szczególności, jeśli A jest macierzą kwadratową stopnia n, to $\det A$ jest jej minorem stopnia n.

Definicja. **Rzędem macierzy** A nazywamy najwyższy ze stopni niezerowych minorów macierzy A. Rząd macierzy A oznaczać będziemy przez $R(A)$. Przyjmujemy dodatkowo, że rząd macierzy zerowej jest równy zero.

Twierdzenie. **(Własności rzędu macierzy)**

- Jeżeli A jest macierzą wymiaru $m \times n$, to

$$0 \leq R(A) \leq \min\{m,n\}.$$

- Jeżeli A jest macierzą kwadratową stopnia n, to

$$R(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

- Dla dowolnej macierzy A zachodzi równość

$$R\left(A^T\right) = R(A).$$

- Jeżeli macierz B powstaje poprzez
  - skreślenie zerowego wiersza (kolumny) macierzy A,
  - skreślenie jednego z dwóch identycznych wierszy (kolumn) macierzy A,
  - skreślenie jednego z dwóch proporcjonalnych wierszy (kolumn) macierzy A,
  - zamianę dwóch dowolnych wierszy (kolumn) macierzy A,
  - dodanie do pewnego wiersza (kolumny) macierzy A innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez pewną liczbę,

  to

$$R(B) = R(A).$$

Definicja. **Macierzą uzupełnioną** układu

$$AX = B$$

nazywamy macierz

$$U = [A|B],$$

czyli

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie. **(Kroneckera-Capellego)** Układ m równań z n niewiadomymi

$$AX = B$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$R(A) = R(U).$$

Wówczas rozwiązania układu zależą od $n - r$ parametrów, gdzie $r = R(A) = R(U)$.
W szczególności, jeśli $n = r$, to układ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

2.4 Metoda Gaussa

Definicja. Niech będą dane dwa układy m równań z n niewiadomymi

$$AX = B \quad \text{i} \quad A'X = B'.$$

Mówimy, że układy te są równoważne, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie. Niech będzie dany układ równań $AX = B$. Jeżeli macierz $[A'|B']$ powstaje z macierzy $[A|B]$ przez

- zamianę dwóch wierszy,
- pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera,
- dodanie do jednego wiersza innego wiersza pomnożonego przez pewną liczbę,
- skreślenie wiersza złożonego z samych zer,
- skreślenie jednego z dwóch identycznych lub proporcjonalnych wierszy,
- zamianę dwóch kolumn przy **jednoczesnej zamianie niewiadomych**,

to układy $AX = B$ i $A'X = B'$ są równoważne.

Niech będzie dany układ równań $AX = B$. Za pomocą opisanych powyżej przekształceń równoważnych, macierz $[A|B]$ sprowadzamy do macierzy

$$[A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1\,r+1} & \dots & c_{1\,n} & y_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2\,r+1} & \dots & c_{2\,n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{r\,r+1} & \dots & c_{r\,n} & y_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{r+1} \end{array}\right].$$

Jeżeli

- $y_{r+1} \neq 0$, to układ $AX = B$ jest sprzeczny;
- $y_{r+1} = 0$ i $n = r$, to układ $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $(y_1, y_2, \dots, y_r)$;
- $y_{r+1} = 0$ i $n > r$, to układ $AX = B$ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów (w szczególności $R(A) = R(U) = r$).

3. Liczby zespolone

3.1 Podstawowe definicje

Definicja. **Ciałem liczb zespolonych** nazywamy zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ wraz z wyróżnionymi elementami $\mathbf{0} = (0,0)$ i $\mathbf{1} = (1,0)$ oraz działaniami $+$ i $\cdot$ zdefiniowanymi poniżej:

$$(a,b) + (x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (a+x, b+y),$$
$$(a,b) \cdot (x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (ax-by, ay+bx)$$

dla $(a,b),(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Bez trudu można sprawdzić łączność i przemienność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania. Liczbą przeciwną do (x,y) jest

$$-(x,y) = (-x,-y),$$

zaś odwrotną do $(x,y) \neq \mathbf{0}$ jest

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

W dalszym ciągu zero $\mathbf{0}$ i jedynkę $\mathbf{1}$ zespoloną będziemy oznaczać po prostu przez 0 i 1. Przyjmujemy też oznaczenie:

$$i \stackrel{\text{def}}{=} (0,1).$$

! Zauważmy, że

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -(1,0) = -1,$$

co oznacza, że w zbiorze liczb zespolonych równanie $z^2 = -1$ posiada rozwiązanie i jest nim liczba i. Łatwo sprawdzić, że drugim rozwiązaniem tego równani jest liczba $-i$.

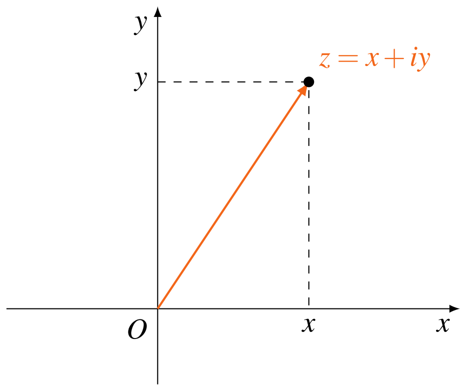
! Liczb zespolonych nie porównujemy ze sobą w relacji mniejszości.

! Każdą liczbę rzeczywistą x będziemy utożsamiać z liczbą zespoloną $(x,0)$. W ten sposób zbiór liczb rzeczywistych można traktować jako podzbiór liczb zespolonych.

Jeśli $z=(x,y)$ jest liczbą zespoloną, to

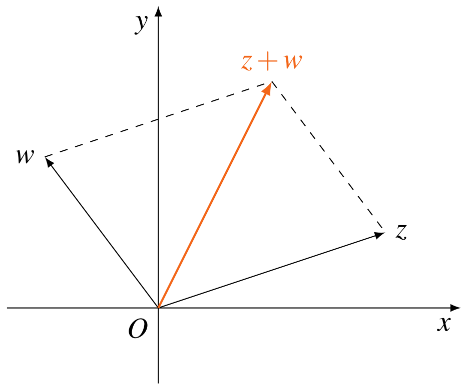
$$\begin{aligned}(x,y) &= (x,0)+(0,y) = \\ &= (x,0)+(0,1)\cdot(y,0) = \\ &= x+iy.\end{aligned}$$

Każdą liczbę zespoloną $z=(x,y)$, gdzie $x,y\in\mathbb{R}$, można jednoznacznie przedstawić w postaci $z=x+iy$, zwanej **postacią kartezjańską** liczby zespolonej.



Rys. 3.1: Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną $z=x+iy$, gdzie $x,y\in\mathbb{R}$, można graficznie traktować jako punkt (x,y) lub jako wektor $[x,y]$ zaczepiony w punkcie $(0,0)$. Stąd zbiór liczb zespolonych nazywamy też **płaszczyzną zespoloną (płaszczyzną Gaussa, płaszczyzną Arganda)**, zaś dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych można interpretować jako dodawanie (odejmowanie) wektorów.



Rys. 3.2: Dodawanie liczb zespolonych

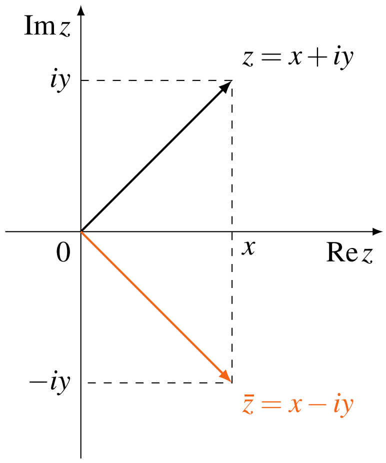
Definicja. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas
- liczbę x nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z i oznaczamy przez $\operatorname{Re} z$, a zatem
$$\operatorname{Re} z = x;$$
- liczbę y nazywamy **częścią urojoną** liczby z i oznaczamy przez $\operatorname{Im} z$, czyli
$$\operatorname{Im} z = y.$$

Liczbę postaci $z = iy$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nazywamy liczbą **czysto urojoną**.

! Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas
$$z = w \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \wedge \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w).$$

3.2 Sprzężenie i moduł liczby zespolonej

Definicja. **Sprzężeniem** liczby zespolonej $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę
$$\bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} x - iy.$$



Rys. 3.3: Sprzężenie liczby zespolonej

Twierdzenie. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas
1) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$;
2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
3) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, o ile $w \neq 0$;
4) $\overline{(\bar{z})} = z$;
5) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$;
6) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

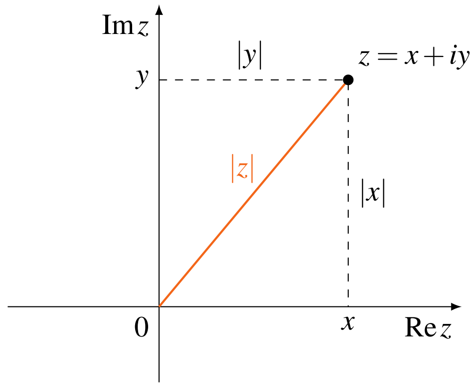
Definicja. **Modułem** liczby zespolonej $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zauważmy, że jeżeli $z = x = x + i \cdot 0$ jest liczbą rzeczywistą, to

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x|,$$

gdzie $|x|$ oznacza wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x.

Geometrycznie moduł liczby $z = x + iy$ interpretujemy jako odległość punktu (x, y) od początku układu współrzędnych.



Rys. 3.4: Moduł liczby zespolonej

Twierdzenie. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

1) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;
2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
3) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, o ile $w \neq 0$;
4) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (tzw. **nierówność trójkąta**);
5) $||z| - |w|| \leq |z - w|$;
6) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$;
7) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

3.3 Argument i postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ i $z \neq 0$. Zauważmy, że

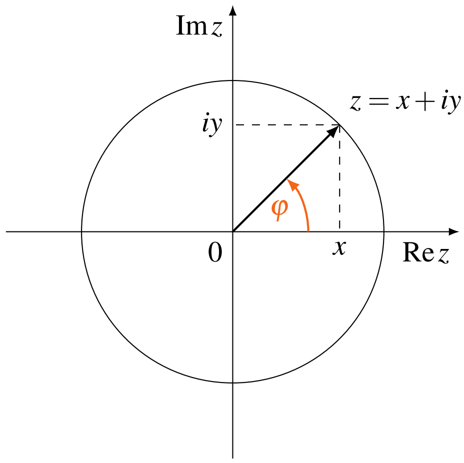
$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{|z|^2} + \frac{y^2}{|z|^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Istnieje zatem nieskończenie wiele liczb $\varphi \in \mathbb{R}$ takich, że

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Definicja.

- Jeżeli $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ i $z \neq 0$, to każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ taką, że zachodzą równości (3.1) nazywamy **argumentem** liczby zespolonej z. Zbiór wszystkich argumentów liczby z oznaczamy przez $\arg z$.
- Spośród wszystkich argumentów liczby $z \neq 0$ dokładnie jeden należy do przedziału $[0, 2\pi)$ – nazywamy go **argumentem głównym** liczby z i oznaczamy symbolem $\operatorname{Arg} z$.
- Przyjmujemy dodatkowo, że argumentem liczby 0 jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz że $\operatorname{Arg} 0 = 0$.



Rys. 3.5: Argument liczby zespolonej

Jeżeli $z = x + iy$ jest dowolną liczbą zespoloną, to z (3.1) wynika, że

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi,$$

gdzie $\varphi \in \mathbb{R}$ jest argumentem liczby z. Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} z &= x + iy = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = \\ &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) . \end{aligned}$$

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) , \quad \text{gdzie } \varphi \in \arg z, \tag{3.2}$$

zwanej **postacią tygonometryczną** liczby zespolonej z.

Twierdzenie. Jeżeli $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oraz $w = |w| (\cos \psi + i \sin \psi)$, to

1) $z \cdot w = |z| \, |w| (\cos (\varphi + \psi) + i \sin (\varphi + \psi))$;
2) $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos (\varphi - \psi) + i \sin (\varphi - \psi))$, o ile $w \neq 0$.

Wniosek. Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, to

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

W szczególności, jeśli $|z| = 1$, to

$$z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \textbf{(wzór de Moivre'a)}$$

Definicja. Niech dana będzie liczba zespolona z i $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że liczba zespolona w jest **pierwiastkiem stopnia** n z liczby z, gdy $w^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie. Jeżeli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ jest liczbą zespoloną różną od zera, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby z. Pierwiastki te mają postać

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

3.4 Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wprowadźmy oznaczenie

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Wówczas dowolną liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = |z|\, e^{i\varphi}, \quad \text{gdzie } \varphi \in \arg z,$$

zwanej **postacią wykładniczą** liczby zespolonej z.

Twierdzenie. Jeżeli $z = |z|\, e^{i\varphi}$ oraz $w = |w|\, e^{i\psi}$, to

1) $-z = |z|\, e^{i(\varphi+\pi)}$;
2) $\bar{z} = |z|\, e^{-i\varphi}$;
3) $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi}$, o ile $z \neq 0$;
4) $z \cdot w = |z|\,|w|\, e^{i(\varphi+\psi)}$;
5) $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ dla $n \in \mathbb{N}$;
6) $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\varphi-\psi)}$, o ile $w \neq 0$.

Twierdzenie. (wzory Eulera) Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzą równości:

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \quad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right).$$

3.5 Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie. **(Zasadnicze twierdzenie algebry)** Każdy wielomian stopnia dodatniego n o współczynnikach zespolonych ma w ciele $\mathbb{C}$ co najmniej jeden pierwiastek.

Wniosek. Każdy wielomian W stopnia dodatniego n o współczynnikach zespolonych rozkłada się na czynniki liniowe, tzn.

$$W(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

gdzie $a_n, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Twierdzenie. Jeżeli W jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i $z_0 \in \mathbb{C}$ jest jego pierwiastkiem, to liczba $\bar{z}_0$ jest również pierwiastkiem W oraz krotności pierwiastków z_0 i $\bar{z}_0$ są sobie równe.

Wniosek. Każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się w ciele $\mathbb{R}$ na czynniki liniowe $(ax+b)$ bądź kwadratowe $\left(x^2+px+q\right)$, gdzie $\Delta = p^2 - 4q < 0$ $(a, b, p, q \in \mathbb{R})$.

Wniosek. Każdy wielomian stopnia dodatniego n o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek. Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma pierwiastek rzeczywisty.

4. Zadania

4.1 Macierze i wyznaczniki (5 godzin)

Zadanie 1 Mając dane macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ oblicz:

(a) $(2A - 3B + C) \cdot D$,

(b) $\left(A \cdot B^T\right)^T - 2C \cdot D$.

Zadanie 2 Korzystając z definicji, oblicz wyznaczniki (a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Zadanie 3 Stosując metodę Sarrusa, oblicz wyznaczniki

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -9 & 6 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$,

(c) $\begin{vmatrix} -2 & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Zadanie 4 Stosując twierdzenie Laplace'a, oblicz wyznaczniki:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Zadanie 5 Stosując własności wyznaczników oblicz

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Zadanie 6 Oblicz wyznaczniki, sprowadzając je do postaci trójkątnej

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Zadanie 7 Wyznacz macierz odwrotną do podanej: (a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{bmatrix}$.

Zadanie 8 Rozwiąż równanie macierzowe:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$,

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.2 Układy równań liniowych (3 godziny)

Zadanie 1 Stosując twierdzenie Cramera, rozwiąż układ równań:

(a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+5y+3z=1 \\ 3x+2y+2z=8 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+3y+2z=6 \\ 2x-4y+z=9 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

Zadanie 2 Stosując metodę eliminacji, rozwiąż

(a) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y-2z=-4 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x+4y+6z=4 \\ 2x+y+4z=1 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 2x+y-3z-2u=4 \\ x-2y-2z-3u=2 \\ x+3y-z+u=1 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x+y=0 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$, (e) $\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$.

4.3 Kolokwium nr 1 – przykładowy zestaw

1. Oblicz wyznacznik: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.
2. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Wyznacz A^{-1} i $A \cdot B^T$. **(b)** Rozwiąż równanie macierzowe: $A \cdot X = 2B + X$.
3. Rozwiąż układy równań stosując poznane twierdzenia:
   (a) $\begin{cases} x - 2y + z + u = 0 \\ -2x + 4y - z + 4u = 2 \end{cases}$, **(b)** $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$.
4. **(a)** Niech $\mathbf{a} = [-2, -1, 1]$, $\mathbf{b} = [2, 0, 1]$. Wyznacz kąt między wektorami **a** i **b**. Oblicz pole trójkąta rozpiętego na wektorach **a** i **b**.
   (b) Napisz równanie płaszczyzny π zawierającej punkt $P = (-3, 0, 2)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{n} = [2, 0, 1]$. Sprawdź, czy płaszczyzna ta jest równoległa/prostopadła do prostej $l: x = 4t, y = 2, x = 1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.
5. **(a)** Pytanie teoretyczne **(b)** Pytanie teoretyczne

<u>Warunki zaliczenia Kolokwium 1</u>: zad. 1, zad. 2-5 - jeden podpunkt.

Przykłady pytań teoretycznych :

1. Sformułuj cztery wybrane własności mnożenia/dodawania macierzy.
2. Sformułuj definicję i dwie własności macierzy transponowanej/odwrotnej/jednostkowej.
3. Podaj cztery wybrane własności wyznaczników.
4. Sformułuj twierdzenie Cramera.
5. Podaj cztery własności rzędu macierzy.
6. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capellego.
7. Podaj definicję układu jednorodnego. Kiedy taki układ posiada rozwiązanie niezerowe?
8. Podaj definicję i dwie własności iloczynu skalarnego/iloczynu wektorowego/iloczynu mieszanego.
9. Podaj wzór na objętość równoległościanu rozpiętego na trzech różnych wektorach.
10. Podaj wzór na pole równoległoboku/trójkąta rozpiętego na dwóch wektorach.
11. Kiedy dwa wektory/proste/płaszczyzny są równoległe/prostopadłe?
12. Jak sprawdzić, czy trzy punkty są współliniowe?
13. Jak sprawdzić, czy trzy wektory są współpłaszczyznowe?
14. Podaj interpretację geometryczną układu równań: (a)$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - z = 2 \end{cases}$, (b)$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 2 \end{cases}$.
15. Podaj definicję grupy i przykład struktury która jest (nie jest) grupą.
16. Podaj definicję i przykłady ciała.

4.4 Liczby zespolone (5 godzin)

Zadanie 1 Wykonaj działania i wynik przedstaw w postaci kartezjańskiej

(a) $(1+4i)+(5+2i)=$
(b) $(1+4i)-(5+2i)=$
(c) $(3-5i)(2+i)=$
(d) $\frac{3+2i}{1+i}=$
(e) $(1-2i)^2 i^{17}=$
(f) $\frac{i^3(2+3i)^2}{(1+2i)^2}=$

Zadanie 2 Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej podane liczby, a następnie przedstaw je w postaci trygonometrycznej:

(a) $z_1=2i$, (b) $z_2=-3$, (c) $z_3=-2\sqrt{3}+2i$, (d) $z_4=2-2i$.

Zadanie 3 Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby $z=\sqrt{3}+i$, $w=-1-i$, $u=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, a następnie wykonaj działania

(a) $z\cdot w$, (b) $\frac{w}{z}$, (c) $\frac{z^{10}}{u^2\cdot w^5}$, (d) w^{2006}.

Zadanie 4 Oblicz

(a) $\sqrt[3]{8}$, (b) $\sqrt[4]{i}$, (c) $\sqrt[3]{-3-3i}$, (d) $\sqrt{3+4i}$.

Zadanie 5 Rozwiąż równania

(a) $z^2-6z+10=0$,
(b) $z^2-(5+2i)z+(7+11i)=0$,
(c) $(z^2+z-6)(z^2+2z+5)=0$,
(d) $(z^3-i)[z^2-(4-i)z+(5+i)]=0$.

Zadanie 6 Rozwiąż równanie $x^4-2x^3+11x^2-18x+18=0$, wiedząc że liczba $x_1=1-i$ jest jedym z jego pierwiatków.

Zadanie 7 Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniające zależności:

(a) $|z|\leq 2$,
(b) $\mathrm{Re}(z+1-2i)<0$,
(c) $\mathrm{Im}\,\frac{z-2}{z+2}=0$,
(d) $|z-1|=3$.

4.5 Kolokwium nr 2 – przykładowy zestaw

1. Rozwiąż równanie w dziedzinie zespolonej:
   (a) $z^2 - (2i-1)z - i = 0$,
   (b) $z^3 - i = 0$.
2. **(a)** Oblicz $\mathrm{Re}(\frac{\bar{z}}{z+i})$, jeśli $z = 2-2i$.
   (b) Oblicz i zapisz w postaci kartezjańskiej $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{35}$.
   (c) Naszkicuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(iz) < 1 \wedge |z+1+i| < 2\}$.
3. Niech $\varphi(x,y) = [x-2y, 3y]$.
   (a) Wyznacz macierz przekształcenia φ oraz jego wartości własne.
   (b) Wyznacz wektory własne przekształcenia φ dla wybranej wartości własnej λ.
4. **(a)** Pytanie teoretyczne **(b)** Pytanie teoretyczne

Warunki zaliczenia Kolokwium 2: zad. 1,3,4 - jeden podpunkt, zad. 2 - dwa podpunkty.

Przykłady pytań teoretycznych:

1. Podaj definicję postaci kartezjańskiej i trygonometrycznej liczby zespolonej.
2. Podaj definicję i interpretację geometryczną modułu liczby zespolonej.
3. Podaj definicję i interpretację geometryczną argumentu liczby zespolonej.
4. Podaj definicję i interpretację geometryczną sprzężenia liczby zespolonej.
5. Podaj definicję i interpretację geometryczną pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej.
6. Sformułuj zasadnicze twierdzenie algebry.
7. Co można powiedzieć o pierwiastkach wielomianu zespolonego $W(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$, jeśli $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$, $W(3-i) = 0$ oraz $W(2+i) = 0$.
8. Ile pierwiastków rzeczywistych/zespolonych może mieć wielomian zespolony stopnia trzeciego.
9. Podaj definicję i dwa przykłady przestrzeni liniowej .
10. Podaj definicję przekształcenia liniowego i przykład przekształcenia, które jest/ nie jest liniowe.
11. Uzasadnij, że przekształcenie $\varphi(x,y) = [x-2y, 3y]$ jest liniowe.
12. Uzasadnij, że przekształcenie $\varphi(x,y) = [x-2y, 3+y]$ nie jest liniowe.
13. Podaj definicję wartości własnej i wektora własnego przekształcenia liniowego.